DE MAXIMIS, ET MINIMIS

LIBRI DVO.

DE MAXIMIS, ET MINIMIS

GEOMETRICA DIVINATIO

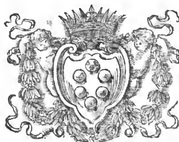
IN QVINTVM CONICORVM APOLLONII PERGÆI *ADHVC DESIDERATVM.*

AD SERENISSIMVM FERDINANDVM II. MAGNVMDVCEM ETRVRIÆ.

LIBER PRIMVS.

AVCTORE

VINCENTIO VIVIANI.







FLORENTIÆ MDCLIX

Apud Ioseph Cocchini, Typis Nouis, sub Signo STELLÆ.

SVPERIORVM PERMISSV.



SERENISSIMO

FERDINANDO II.

MAGNODVCI ETRVRIÆ.



RANDE opus aggredior, dicerem etiam tua Celſitudine nõ indignum, SERENISSIME MAGNEDVX, ſi meis viribus abſolui poſſe crediderim. MAGNI GEOMETRÆ APOLLONII Conicorum diuinas propè dixerim meditationes per tot ſecula temporum iniuria nobis ablatas proprio Marte reſtituere, Herculeus equidem labor eſt, & qui diu plurima, eaque robuſtiſsima ingenia, aut ab incœpto deterruit, aut in opere defatigauit. Audeo tamen auſpicijs tuis inclyte FERDINANDE; & quod negatum imbecillitati meę timere debueram (quam per per tot annos domeſtica incommoda, negotia publica, & grauiſsimæ corporis, animique ægritudines exagitarunt) gloriæ tuæ, maximoque in Matheſim, cognotaſque ſcientias, atque artes, te fauente inſtauratas, amori ſeruatum fuiſſe confido. Ibi enim Numinis fauor clariùs elucet, vbi nulla hominum virtus adeſt. In re tam ardua conatus mei ſi felici euentu caruerint, niſi laudem, profectò excuſationem inuenient. At ſi fortuna

hilari

hilari vultu votis meis arriſerit, de tuo patrocinio, ac munificentia, pro tam illuſtri beneficio, non tantùm hæc ætas, quæ te præſentem vnà mecum admiratur, verùm etiam magnificè loquetur grata poſteritas. Hęc igitur quidquid ſunt, benignè, vt ſoles, intuere. Si MINIMA, quod reor, ſterilis ingenij fœtum vt foueas; ſi MAXIMA, vt tuæ vegetę lucis prolem regalibus vlnis accipias. Atque interim plurimos, beatoſquę annos bono publico viue.

Florentiæ. Octauo Calendas Ianuarij 1658.

SER.^MÆ^ CELS.^NIS^ TVÆ

Humillimus, Addictiſsimus, Obſtrictiſsimus Seruus, & Cliens

Vincentius Viuiani.



IN DIVINATIONEM GEOMETRICAM DE MAXIMIS, ET MINIMIS PRÆFATIO.

AMICE LECTOR.

NEMO omnium nescit, qui eruditionis aliquid degustarint, ac geometricis potissimùm studijs animum intenderint, meditationes Conicas, tum antiquissimas esse, tum ab APOLLONIO Pergæo (qui ad annos fermè nongentos nunc supra mille sub Ptolomeo Euergete floruit) omnia ea vsquequaque fuisse collecta, quæ sparsim antea in eo genere commentati fuerant Aristeas Geometra, Eudoxus Cnidius, Menæchmus, Euclides, Conon, Trasideus, Nicoteles, & quod aliqui tradunt Archimedes etiam, ac Dositheus, multique alij vetustiores, quorum nomina cum scriptis periere. Hos inter APOLLONIVS, vtilissimam hanc, admirabilemque doctrinam egregiè illustrauit, ampliauitque octo libris comprehensam, vt ipse ad Eudemum præfatur. Id autem tam felici supra cæteros excellentia perfecit, iure vt ab omnibus sui æui Mathematicis MAGNVS GEOMETRA audierit.

Neque illud nos fugit, ad vsque Pappi Alexandrini tempora, hos octo libros peruenisse, qui necessaria nobis Lemmata ad eorum notionem construxit. Eutocius quoq; Ascalonites Pappo iunior, pręter commentaria in quatuor APOLLONII priores, reliquas curas in totidem reliquos Anthemo promittit. Cæterùm ex quo Eutocius floruit, annos, vt aliqui tradunt, à condita saluta circiter CCCCLXXX. integram librorum familiam fuisse visam nemo prodidit, sed quatuor posterioribus inuidiosa vetustate diuulsis, priores tantùm meliori concordia superfuisse creditum hactenus.

Hanc ego notitiam tacitus intra me condidi, atque iam tum, cum prima

prima Conicæ Matheseos elementa balbutire didici, annis duodeuiginti iam expletis, statim ea cura in animo sedit (mihi equidem vni placere certum, ac prurienti genio obsecundare) inuestigandi quid APOLLONIO propositum in libris deperditis, & qua in parte Conicæ theoriæ versarentur. Quinti autem libri hypothesis præcipuè me trahebat, vbi ex prima APOLLONII epistola ad Eudemum de MINIMIS, & MAXIMIS magna sui parte agi non ignorabatur, deque MINIMIS, & MAXIMIS lineis ad ipsas Coni-sectionum peripherias, referente Eutocio. Qua autem ratione, aut quid speciatim colligeretur in ipso quinti argumento, diuinationi, & coniecturæ tantùm relinquebatur. In hac ergo cogitatione defixus, susceptam Spartam exornare vehementiori in dies studio contendebam, ac biennij spatio cæmenta abundè creuerant hisce mox libris condendis; noua scilicet quotidie succurrebant huius diuinationis occasione, quæ cupiditatem, & laborem intenderent, donec paulatim in hunc, maioremque numerum aucta, ad vniuersam de MAXIMIS, & MINIMIS pertractationem se se extenderint. Sed vix diuinæ huius Geometriæ augustissimum limen subieram, cum inuidis casibus, domesticis præsertim turbamentis iactatus, pedem illinc cogor referre, indolique responsare; per trina iam lustra in alias curas proiectus, quæ inuita Mathesi suscipiuntur. Quare, & priuatis concoquendis negotijs distentus, & publicis auocatus, dum alia qualiscunque operæ meæ obsequia SERENISS. MAGNODVCI præstare debeo, morbis ad hæc sæpe incurrentibus; atque incerta vsus valetudine, non hanc tantùm de MAXIMIS, & MINIMIS ritè disponere, ac perficere quiui, verùm nec aliam vllam è geometricis meis commentationibus; quarum tamen, nec pauca schedulis commendaueram, vti per tempus subseciuum, & curis subtractum multiplicibus, furari industriam licuerat. Id vnum solatio fuit, hæc cum Amicis participasse honestissimis, sicuti factum memini tredecim plus minus ab hinc annis: cum Amicis inquam, & huiusce studij amatoribus, quibusque haud retusum erat palatum ad noua hæc veritatum scitamenta. Vnus vtinam, vt credere pium est, tardior Diuorum Comes (cur autem inuideo?) mihi testis superesset Amicorum optimus, ac suauissimus, cui nihil iam est, quod pro illius meritis in me ingentibus reddam, præter grati animi ingenuam professionem, ac si quid mihi erit vnquam vocis, aut soni præstantissimarum eius virtutum fidam omni tempore commemorationẽ; Braccium loquor Manettum, cuius laudes piaculum est ignorare, siue generis nobilitatem, cum morum elegantia summa probitate coniun-

ctam, siue eruditionis ornamenta cum Mathematicæ studio, scientiaque spectemus; dicam cumulatissimè, haud vltimum inter Auditores Galilei Galilei: quantum Heroa nomina? quantum Florentiæ decus, lumen seculi, ingeniorum phœnicem, sydus, Solemq; vniuersæ Matheseos? quale dixerim numen, ac genium corrigendæ Geographię, Astronomię nouis phænomenis ope telescopij detectis illustrandæ, vindicandęque Philosophiæ, in orbis admirationem, ac posteritatis regulam natum? Ex huius officina prodiens Manettus, non aliter coloratus apparuisse debuit. Quod vel mihi æternum incutiat ruborem, ac morsu pœnitentiæ assiduò animum lancinet, si tantillum cogito profectum meum sub eodem Præceptore Galileo, ad cuius sapientissimi oris dictata, laris, & mensæ, horarumque omnium communionem per annos fere tres interiùs admitti contigerit.

Testis alter accedat, quem vocare ad officium possit Prætor incolumem, ac præsentem (ita illum fata diu seruent) Illustrissimus, & Clarissimus Senator Andreas Arrighettus, cum quo dudum meos hosce labores communicatos volui, eiusque examini, atque emunctissimo iudicio submittere; vt ille non tantùm eo tempore, sed hodie quoque Conicas disciplinas memoriæ feliciter recolit, quas Iuuenis attentè excolebar, cum totus Mathematicis addictus artibus eundem Galileum affectabatur. Atqui ob hanc eximiam laudem, ac reliquas virtutes illustribus hodie, primæque notæ muneribus meritò in Patria fungitur.

Ab eadem classe alium arcesso, qui pro me aram tangat; Florentinum Patricium Carolum Datum: illum Matheseos, illum liberæ, indeprauatæq; Philosophiæ nobilem amatorem; cuius in ore, Græca, Latina, Etrusca sedet facundia; quem vnum inter paucissimos huiusce Vrbis demiror, qui & suæ eruditionis exemplo, & opera, fauore, officijs in alios, genus omne bonarum artium earundemque cultores mirificè amplectatur, ac foueat. Nouit Italia, nouit Europa hominem, noscet breui vniuersus literatorum Orbis ex amœnissimis doctissimisque lucubrationibus, quas ipse in dies eruditissimè molitur.

Hic, de meis hisce fœtibus Parente ipso magis sollicitus, quoties verecundiam hanc meam, edendique morositatem increpuit? quoties desidiam, metumque exprobrauit? quoties monuit vt pusillum aliquod, dummodo nouum populi iudicio committerem? quoties à multis annis refractario pudori calcar hortationis impegit, vt ab hoc saltem Commentario de MAXIMIS, & MINIMIS periclitari famam inciperem, quem magis affectum compositumque sciebat? At ego

nihil edere obſtinatus, moliri aliquid lætus, ingenium, geniumque meum ea cunctatione paſcebam; Amicos verò cariores detinebam, noui ſubinde aliquid è meis nugis ad eorum examen afferendo.

Sed circa initium proximè elapſi Menſis Iunij, currentis anni 1658. Ioannes Alphonſus Borellus Piſis reuerſus, qua in Vrbe, & Academia Clariſſimus Matheſeos Profeſſor publicè docet, Romam cogitabat. Cauſa illi profectionis mihi hæc longiùs narrandi.

Inter cætera Auguſtæ Domus inſtrumenta, quibus SEREN. FERDINANDVS II. MAGNVS ETRVRIÆ DVX, vel ad inuidiam potentiſſimorum Regum prætioſè nobilitatur, loculi aſſeruantur Codicum MM. SS. quos è Medicea Romæ Bibliotheca magnis pridem ſumptibus collectos Florentiam tranſtulerunt. Arabicus inter hos comparebat latina ſupernè inſcriptione. APOLLONII PERGÆI CONICORVM LIBRI OCTO.

Iuu. Sat.8. „ *Exclamare libet populus, quod clamat Oſiri*
„ *Inuento.*

Hunc Borello ſæpius tractare licuit, ſæpius diligenti oculo intueri. E' numero, ac diſtinctione librorum, è collatione diagrammatum, quæ proximè congruebant tum in Arabico, tum in prioribus quatuor, quos antea habebamus, atque è reliquorum tandem examine, quibus conſimilis facies, ſimiliaque lineamenta Conica, haud immeritò conijciebat integros eſſe APOLLONII libros diu deploratos, diu requiſitos.

Orat igitur SERENISS. MAGNVMDVCEM, adnitenteque SERENISS. LEOPOLDO FRATRE, Parente muſarum inclyto, vnico, atq; aureo, ſi non aurei ſeculi Mecœnate; exorat ſibi, vt Romam deferre liceat, tum APOLLONIVM, tum libellos alios quoſdam geometricos, interpretem illic facilè nacturus inter Viros Propagandæ Fidei, cui fidem veri detectam penitus exploratamque deberet.

Commodùm Florentiæ peregrinabantur Maronitæ nonnulli, quos huic operæ aptos ſtatim ſenſit PRINCEPS idem LEOPOLDVS. Accerſiti coram interpretantur, vt mihi narratũ eſt. Ex proœmio Operis, & cuiuſque libri initio, Propoſitionumque aliquot explanatione rem ſicuti erat agnoſcunt; præter quatuor iam editos APOLLONII libros, tres quoque proximos poſteriores adeſſe, compendij tamen factos, neſcio cuius Arabis diligentia. Nunquam antea huc penetratum, aut cognitionis tam certæ lucrifactum, quamlibet aliàs Viris, & Arabicæ linguæ peritis, & Geometriæ conſultiſſimis ſæpe conatis eruere: accurante pręſertim SERENISS. eodem LEOPOLDO,

cuius

cuius illa inter innumeras magnanimo in pectore cura adolescit, noui instar Triptolemi sparsis literarum, ac beneficientiæ feminibus, mortale genus quotidie altiùs demereri. Indicante autem Maronita adesse Romæ, vbi per Æstatem agere Borellus decreuerat, Abrahamum Echellensem natione Arabem, linguarum verò orientalium peritia oppidò celebrem, neq; Matheseos ignarum; tunc idem Borellus (quandoque SERENISS. MAGNODVCI placuisset, APOLLONIVM, ac reliqua scripta fidei suæ committere, & Abrahamo ocium foret interpretandi) suam vltrò operam in rebus geometricis adhibere pollicitus est. Satis superque se adprobauerat Abrahami peritia, qui linguarum orientalium Doctor, tunc Romæ, olim in Pisano Lyceo meruerat. Nec minus spectata erat suæ SERENISSIMÆ CELSITVDINI Borelli præstantia in geometricis, ac philosophicis studijs.

Non cunctanter ergo SERENISS. MAGNVSDVX scripta Borello credidit, & qua solet augusta sapientia bonas artes tutari, ac fouere, operis aggressionem nutu firmat, suique SERENISSIMI NOMINIS auspicio, ac maiestate fundari permittit.

Hæc omnia acta sunt intra dies octo, vel minus, quibus Borellus Florentiæ permansit. Ego hinc procul, cum insigne hoc cemelium Reipublicæ literariæ detectum. Reuerso, seduli Amici statim nunciant, ac Borellus deinceps rem totam mihi ore confirmat, paulò ante quàm peteret Romam. Exultabam animo, ac plenus gaudij gestiebam, fortunatum verè me sentiens, quod hac ætate spirarem, cum magnus Geometriæ spiritus redderetur hoc reperto thesauro.

Nec propterea cessabant Amici, quibus res meę cordi erant, hortationes, ac stimulos subdere, vt hanc saltem de MAXIMIS, & MINIMIS lucubrationem publici iuris facerem; de qua actum esse omnino videbam, tunc iam repertis APOLLONII libris; atq; animum ab ea prorsus auerteram tineis iam pertundenda, aut Veneris Marito donanda. Raro interim, aut nunquam auditum fatebantur, mihi sanè (vt illis videbatur) improsperum: non modò librum per duodecim iam secula consepultum reuiuisci me viuo, qui eidem aliquatenus supplendo non indiligenter vacaueram; sed & illud damnabant qualescunque hos labores meos delituisse, qui diu pridem vulgari, ante APOLLONIVM repertum, ac studiosorum manibus teri potuissent. Acriùs inquam instare Amici, neque incitamenta remittere; vno ore adhortari, vt properatò colligerem, disponerem, meorumque editionem anteuerterem. Non deerant autem illis speciosa acumina ad impellendum. Quod enim ad me; priùs fuisse hæc excogitata, quàm

illa APOLLONII reperta. Facilè etiam perſuadere ignarum me, vel ipſius Arabici alphabeti, nec vnquam mihi tractatas, aut cognitas noui libri figuras. Eſto aiebant me tantùm collineaſſe ad eundem cum APOLLONIO ſcopum, (quamuis latè ſe fundat mea de MAXIMIS, & MINIMIS ratiocinatio) non ne plures viç eandem ducunt Corinthum? Quod ſi ab eo penitus abeam, dum plura conſector geometrica, emolumenti inde tamen aliquid accedet literis, ac eo ſaltim nomine, quia nouum commendabitur.

Fateor autem, mihi alioquin pertinaci deditionem hæc exprimere incipiebant: vehementiùs tamen acriores ſtimuli aliundè accedentes: ſed digito compeſce labellum.

Inter hæc Borellus ſub octaua Iunij, ni fallor, Romam contendit, cum ſuo illo diues noui APOLLONII viatico. At ego delinita obſtinatione meis velut ad lucem diſponendis ſenſim incumbo, quod Viris CCLL. Senat. Arrighetto, ac Dato bona fide patefacio; nec prçſtantiſſimo Adoleſcenti Laurentio Magalotto celatum volui, inſimul ratus, amicitiæ candori labem inferre, ſi hæc mea qualiacunque inuenta feliciſſimum, atque admirabile prorſus ingenium latuiſſent, Mathematicis non minus, quàm Philoſophicis, atque Anatomicis ſtudijs impensè addictum; Iuriſprudentiæ ſacris initiatum; Muſis, quà latinis, quà Etruſcis apprimè carum; ad omnia egregia æque natum, nulliſque demum equeſtrium exercitationum decoribus deſtitutum, qui ingenuum, & ornatiſſimum Patricium decent, è cuius tam clara Adoleſcentię Aurora fulgentiſſimum Virilitatis meridiem Patria hæc meritò auguratur.

Sic pluteos, & ſcrinia compilans mea confuſas pagellas in meliorem ordinem digero, aptiora huic tractatui ſeligo, atque in claſſes partita tribus diſtinguo faſciculis.

Sed interim agrum petens Solem cogor pati noxium, & immodicum, qui febri ſtatim iniecta acutiſſima penè ad necem me afflixit; fuitque dies Iunij decimus octauus cum quindenis alijs inter meos egritudinum faſtos, magnis februalibus nimiùm quantùm nefaſtos. Diù inops virium omnem ſtudiorum curam abieceram: nec caput, nec mens conſtabat paginis recenſendis, quæ multo punice, multaq; litura indigebant, multa etiam perſcriptione; quippe adumbraueram meditationes, & confuſanea opera, nequid interim deperiret, tantummodo innueram.

Neſcio autē quo pacto labores hi mei SERENISS. LEOPOLDO ſuboluere, qui partitè mox de tota illorum ratione, ac proceſſu à me

con-

condocefactus, non animos tantùm mihi fecit, sed iussit, vt omnibus modis publicarem. Verùm necesse esse prorsus admonuit, à nemine ignorari diu mihi fuisse in pugillaribus meis hunc tractatum affectum ante APOLLONII libros nuper detectos; ac prudenter suggessit publica testatione fidem confestim facere scriptis meis, quatenus saltim constaret à me priùs detecta, atq; habita, quàm vllus Arabici APOLLONII apex in latinum verteretur. Adiecit se veritatis prædem affuturum vbi opus esset, me præter Arabicæ linguæ ignorationem nunquam APOLLONIVM hunc cōtrectasse, aut particulare quidquam ex eo nouisse. Neque hàc steterunt memoranda SERENISS. CELSIT. beneficia, vt æquissimæ causæ patrocinaretur. Nequà suspicionis labecula (si qui forte sunt) parùm æquos mihi homines nutriat, SERENISS. idem PRINCEPS videre ipse, ac perpendere voluit enunciata omnia, ac lineas veluti numerare, quæcunque huic tractationi insererentur, ac singulis fasciculis, Mediceo ante sigillo obsignatis testationem inuictam his verbis propria manu exaratis insculpere.

In primo.

Adì 8. Luglio 1658. furon veduti da me gli appresso numero quarantotto mezi fogli di dimostrazioni geometriche d'vn trattato de MASSIMI, e MINIMI intorno alle Sezioni Coniche, di mano di Vincenzio Viuiani, fermati col mio Sigillo.

Il Principe Leopoldo mano prop.

In secundo verò.

Adì 8. Luglio 1658. furon veduti da me gli appresso numero cinquantotto mezi fogli di dimostrazioni geometriche intorno a materie Coniche attenenti al trattato de MASSIMI, e MINIMI, di mano di Vincenzio Viuiani, fermati col mio Sigillo.

Il Principe Leopoldo mano prop.

In tertio denique.

Adì 8. Luglio 1658. furon veduti da me gli appresso numero sessantanoue mezi fogli di dimostrazioni geometriche d'vn trattato de MASSIMI, e MINIMI intorno a Problemi, e Teoremi varij, il tutto, come ne gli altri fasci scritto in forma di bozza, di mano di Vincenzio Viuiani, fermati col mio Sigillo.

Il Principe Leopoldo mano prop.

Tam sapientis, tam inclyti, tam generosi Principis verendo testimonio probatus, faustoque iussu excitatus, quanta animi alacritate opus aggredior, exactiori forma, atque ordine contexendum.

Roma

Roma tunc literæ à Borello vigesima nona Iunij nunciante inter alia, feliciter inceptam APOLLONII versionem, cuius proxima Hebdomade specimen missurus foret ad SERENISS. LEOPOLDVM, vt illinc de vniuerso opere spem egregiam conciperet. Nona Iulij à me responsum, atque vnà significatum quid statuissem de meis laboribus publico dandis, paucisque narratum, quid, quantùmque SERENISS. LEOPOLDVS egerit, & qua eius summa benignitate, ac præsidio ad hæc animarer. Insimul orabam, ne quid vel minimum, posthac super libris APOLLONII repertis ad me scriberet. Iisdem præcibus SERENISS. LEOPOLDVM adij, vt sacrum me, atque intestabilem, & omni indignum colloquio censeret de eadem re. Iterum Borellus ad me vigesima eiusdem Mensis, silentium paciscens, atque institutum meum laudans (euicerant quippe Amicorum consilia, ac PRINCIPIS iussa) Conicas speculationes typis mandandi, diserta subdens verba.

Ed io trà gli altri testifico, che ella non hà hauuto minima notizia di questi vltimi libri d'APOLLONIO.

Magnis quotidie incrementis Romano sermone, vt Romę par erat, Grecus Auctor, nuper Arabs loquebatur. At Borellus mihi Harpocrates de condicto. Florentiam deinde reuertitur exeunte Octobri. Eapse reditus die, SERENISS. MAGNVSDVX (qua in omnes incredibili humanitate ad miraculum vsque, ac disciplinā Regnantium vti solet) Borellum, me præsente, de silentio admonuit, donec meus prodiret liber; atqui ille mecum inuiolatè seruauit, quod cum alijs quoque ab eo factum non dubito.

His itaque in antecessum fide vti optima maxima expositis, abundè ostensum puto, ante APOLLONIVM repertum per trina iam lustra meas hasce, qualescunque cogitationes fuisse lucubratas. Inde incorruptissimi testes Arrighettus, & Datus adstruunt. Magalottus ab ipsa statim inuentione mihi accersitus confirmat. Arabicæ linguæ fateor sum ignarissimus, quod mihi iniurato, vel incredulus credat Apella. Neque APOLLONII posteriores versasse vnquam libros, aut ex ijs me nouisse quidquam, etiam Borellus sponsor accedit.

Poteram solennem ab his formam testandi, ex iure Quiritum exigere huic præfationi subscribendam, sed omnium instar, ac veluti pro muro æneo veritatis, extitit mihi SERENISS. LEOPOLDI lucidissima asseueratio, cui radios suos Apollo submittit, atque illa olim, quæ apud Sagram de veritate concedant.

Interea non desinam Lector quin te rogem, vt quæ hìc legeris, ijs qui

qui non legerint, vbi res ferat indicare ne fugias. Expedit enim existimationis meæ causa, totam hanc facti seriem, quàm latissimè in vulgus manare; alioquin silentium hìc perdet Amyclas.

Sed inhęreamus ei, quod magis intereſt; ſi etenim eũdem, aut pręter propter cum APOLLONIO ſcopum attigiſſe fors mihi dederit (optare debeam, nec ne, equidem neſcio) nemo ſanus ignorat, quid æra lupinis diſtent, nemo præſtantiſſimi Scriptoris ingenium, doctrinam, ſoliditatem, nemo tenuitatem meam, & curtam domi ſupellectilem. Ille omnium fermè, qui ante ſe de Conicis ſcripſerunt videndi commoditate vſus; ego illius tantùm ductu, & auſpicijs mea hæc exequi conabar, ut prioribus quatuor eiuſdem libris, hoc eſt prætioſiſſimæ veſti, niſi complementum, atque integritatem, ſegmenta, & lacinias ſaltim adnecterem.

Quod ſi contra, vel in totum, vel ex parte ab eiuſdem APOLLONII inſtituto aberrauero, non tamen erit pœnitendi prorſus laboris, noui aliquid in eodem argumento Geometriæ Conicæ per me affulſiſſe. Neque ignoro multa, ne dicam infinita veritatum genera, admirandaſque MAXIMORVM, & MINIMORVM contemplationes à me fuiſſe relictas: ſed memento benigne Lector, & finitum omnibus, & mihi infirmiſſimum datum ingenium; multiſque iam annis (quod ijs notum, qui mea norunt) partìm cum morbis, partìm cum morborum reliquijs conflictatum, aut curis fuiſſe diſtractum alieniſſimis; cum tamen hæc ſtudia magnis olim Auctoribus creuerint, qui ſerenitatem, atque ocium, fortunæ lautiori debebant, vel munijs opportunioribus artes illas excolebant. Nec mirere interim ſi tot Menſes excurrerint, ex quo imperata hæc editio inſtitui cæpit. Paucioribus abſoluebatur, ſi valetudo, ac quies annuebant. Sed neque tu à me expetis Lector, neque ego impoſſibilia capeſſo.

Vtere interim, ac ſi tanti ſunt, fruere primitijs hiſce meis, quales iamdiu ſterili in agello prouenerunt, quas tamen non ita extenuabo, vt ſolent cæteri, qui pręfantur; ſunt enim non mea, ſed Naturæ admirabilia opera, ac veritates, ſicuti admirabilis illa, ac vera ſemper eſt; ego detexi tantùm, ac geometrico ordine concinnaui.

At enim multis alijs erudita hæc inceſſit libido APOLLONII Conica, qua deficiunt, reſtituendi ſupplendique. Et quidem non viles animas, ſed mentes nobiliores, atq; eminentiſſimi nominis, compertæq; auctoritatis in geometrico puluere exacuit. Ex his Abbas Maurolicus Meſſanenſis, duobus libris, quintum, & ſextum APOLLONII tunc irrepertos ſupplere, ipſorumq; argumenta diuinare conatus eſt,

(quo

(quo autem felici euentu equidem nescio) atq; hi libri commentarijs subijciuntur in quatuor APOLLONII priores. Alter fuit Claudius Mydorgius Patricius Parisinus, eiusdem APOLLONII sextum, pleno illo exactissimæ doctrinæ acumine inuestigans, quod bini duo libri postremi è quatuor hactenus à Mydorgio editis satis declarant. Vterque sanè tam doctis laboribus magnam sibi industriæ famam circumdedit. Non vitio tamen vllus mihi vertat, si ijsdem molitionibus Adolescentiæ annos ego quoq; impenderim. Etenim ipsa de MAXIMIS & MINIMIS speculatio, quo ad me intacta penitus ad hunc diem vocari potest, nisi quid minimum apud quintum eiusdem Maurolici proximis hisce Mensib us à me notatum excipiam, vti & pauca nonnulla sparsim postea à me reperta in Atlantico verè opere summi Geometræ Gregorij à Sancto Vincentio è doctissima, spectatissima, nec vnquam satis laudata SOCIETATE IESV.

Sed velim Lector antequam ista aggrediar, illa, quæ nuper retuli, apud laudatos Auctores adire ne recuses; erit enim mox fortasse, vt non tota temeritate me oneres.

Quæ autem fata meos maneant libellos, nescio ante vesperum.

De MAXIMIS, & MINIMIS ago; MAXIMA non anhelo, de MINIMIS cum Prætore non curo; si vtraque componuntur, aurea mediocritas nascitur; hac ero contentus.

Neque indictum tandem huius libri titulum volo. DIVINATIONEM voco; verè enim solius diuinantis est, quid speciatim APOLLONIO propositum fuerit assequi, quaue methodo, solo audito nomine de MAXIMIS, & MINIMIS. Non sum ego Discipulus Tagis, aut Verna Sibillę; diuinaculum tamen, ac Prophetam dum ago vehementer cupio, vt hi labores non tantùm in hac florentissima Patria mea sint accepti, sed exteris quoque non iniucundi, omnino autem Reipublicæ literariæ vtiles. Hæc summa votorum. Vale.

Scribebam Florentiæ Octauo Idus Decembris 1658.

TVI

Amantissimus

Vincentius Viuiani.

VINCENTII VIVIANI
DE MAXIMIS, ET MINIMIS
Geometrica diuinatio in V. conic. Apoll. Pergæi.

LIBER PRIMVS.

MONITVM.



NTEQVAM institutum opus aggrediamur, siquidem in ipso frequenter accidet vti, proferreque affectiones propositionum 11.12. ac 13. primi conic. non erit fortasse omninò incongruum meas earundem demonstrationes hic exhibere, quales olim, cum primùm ad elementa conica me conuerterem, aliter ac breuius vnico tantùm Theoremate concludi posse animaduerti, easque proponi enunciationibus, vti rebar genuinis, ac proximis ad trium coni-sectionum, Parabolæ, nempe, Hyperbolæ, & Ellipsis laterum inuentionem. Verùm antea mihi detur, vt quibusdam morem gerens, qui tres prædictas Apollonij propositiones difficiles admodum existimant, ob nimium in ea vsum 23. sexti Elementorum; earundem demonstrationes singillatim afferre possim eodem penitus modo, quo aliquibus, voce, & scriptis explicare solitus fui, hoc est sine composita proportione, quam, nescio qua ratione fastidiant.

Stantibus igitur ijsdem hypotesibus, expositionibus, ac constructionibus prædictarum Apoll. propositionum, adhibitisque figuris, quæ ibi in Commandini versione.

QVo ad 11. primi conic. post ea verba *Rectangulum igitur MLN æquale est quadrato KL sequatur sic.*

Itaque, quoniam quadratum BC ad rectangulum BAC est vt HF ad FA ex constructione, & rectangulum BAC ad rectangulum ACB vt AB ad BC, vel vt ablata BF ad ablatam BG, hoc est vt reliqua FA ad reliquam GC, siue ad LN, ergo ex æquo quadratum BC ad rectangulum ACB, vel recta BC ad CA, vel BG ad GF, vel ML ad LF, erit vt HF ad LN, ideoque rectangulum sub extremis ML, LN, siue quadratum KL æquatur rectangulo HFL. *Vocetur autem huiusmodi sectio &c.* vt ibi vsque ad finem.

Quo ad 12. primi post ea verba, *ergo rectangulum RNS æquale est MN quadrato*, sic dicatur.

Itaque, quoniam rectangulum BKC ad quadratum AK est vt LF ad FH per construtionem, vel vt XN ad NH, & quadratum AK ad rectangulum AKC est vt AK ad KC, vel HG ad GC, vel HN ad NS, ergo ex æquali rectangulum BKC ad rectangulum AKC, siue recta BK ad KA, siue BG ad GF, vel RN ad NF, est vt XN ad NS, ac propterea rectangulum sub extremis RN, NS, hoc est quadratum MN æquale rectangulo sub medijs XN, NF: *linea igitur MN potest spatium XF, &c.* vt ibi vsque ad finem.

Quo tandem ad 13. primi post ea verba *ergo rectangulum PMR æquale est LM quadrato* legatur sic.

Cumque sit rectangulum BKC ad quadratum AK ita HE ad ED ex construtione, vel XM ad MD, & vt quadratum AK ad rectangulum AKC ita AK ad KC, vel DG ad GC, vel vt DM ad MR, erit ex æquo rectangulum BKC ad rectangulum AKC, vel BK ad KA, siue BG ad GE, vel PM ad ME vt XM ad MR, quare rectangulum sub extremis PM, MR, vel quadratum ML æquatur rectangulo XME sub medijs. *Linea igitur LM potest spatium MO &c.* vsque ad finem.

Sed iam ad propositas Apollonij propositiones accedamus, quas simul sequenti Theoremate amplectemur, itemque sine composita proportione demonstrabimus.

THEOR. I. PROP. I.

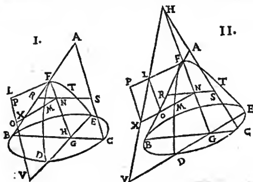
Prop. 11. 12. 13. primi conic.

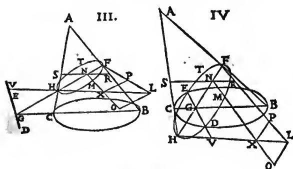
Si conus plano per axem secetur, secetur autem & altero plano basi coni non æquidistante, quorum communis sectio conueniat, vel cum vno tantum, vel cum vtroque latere trianguli per axem vltra, vel infra sui ipsius verticem, planum verò, in quo est basis coni, & secans planum, conueniant secundum rectam lineam, quæ sit perpendicularis, vel ad basim trianguli per axem, vel ad eam, quæ indirectum ipsi constituitur, & fiat, vt rectangulum segmentorum diametri sectionis inter latera, & basim trianguli per axem interceptorum, ad rectangulum segmentorum basis, ita sectionis diameter ad aliam: recta linea, quę à sectione coni ducitur æquidistans communi sectioni plani secantis, & basis coni vsque ad sectionis diametrum, poterit rectangulum adiacens lineæ quarto loco inuentæ, latitudinem habens lineam, quæ ex diametro abscinditur, inter ipsam, & verticem sectionis interiectam (si tamen sectionis diameter ęquidistet alterutri laterum triãguli per axem) sed ipsum excedet (si cum vtroque latere vltra verticẽ conueniat) vel ab eo deficiet, (si ijsdem lateribus infra verticem occurrat) rectangulo simili similiterque posito ei, quod continetur prædicto diametri segmento, & quarta inuenta, iuxta quam possunt, quæ ad diametrum applicantur.

SIt conus, cuius vertex A, basis circulus BC, & secetur plano per axem, quod sectionem faciat triangulum BAC, secetur autem & altero

plano,

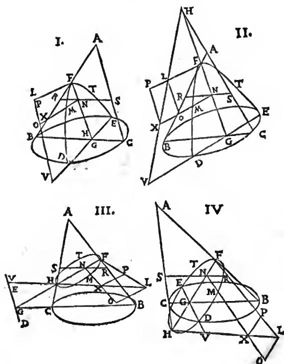
plano, quorum communis sectio F G vel alterutri laterum trianguli per axem, nempe AC æquidistet, vt in prima figura, vel cum vtroque latere in F, H, extra verticem coni, vt in secunda; siue infra verticem, vt in tertia, & quarta conueniat, & secans planum basi non æquidistet, faciatque sectionem in superficie coni lineam MFT, & communis sectio plani secantis, atq; eius in quo est basis coni sit DGE perpendicularis ad basim trianguli per axẽ BC, vel ad eam, quæ indirectum ipsi constituitur, vt in quarta figura; & fiat in prima figura, vt quadratum FG, in reliquis verò, vt rectangulum HGF,





ad rectangulum BGC, ita linea HF, segmentum diametri sectionis, ad aliam FL, quæ (facilitatis, & commoditatis gratia tantùm ad ea, quæ à nobis in posterum sunt pertractanda, non quod hanc, vel aliam positionem requirat propositi demonstratio, potest enim ipsa FL cum diametro FH, ad quemcunque angulum constitui) concipiatur applicari ex F, sectionis vertice, ordi-

natim ductę DE ęquidistans. Patet hìc ipsam FL sectionem contingere in F, per 17. primi conic. (quæ huic aptè præponi poterat, cum ipsa, ope tantum præcedentium septimæ, & decimæ eiusdem Libri demonstretur). Sumatur præterea in sectione quodlibet punctum M, per quod agatur MN æquidistans ipsi DE, vel FL, & producta conueniat in prima figura cum LV parallela ad FG, in reliquis verò cum iuncta HL in X; & per L, X ipsi FN æquidistantes ducantur LO, XP. Dico lineam MN posse rectangulum sub FN, & NO, quod quidem adiacet lineæ quarto loco inuentæ FL, latitudinē habens FN in prima figura, in secunda verò prædictum rectangulum excedens, & in tertia, & quarta ab eo deficiens rectangulo sub LO, & OX simili ei, quod sub HF, & FL continetur.



Ducatur

Ducatur enim per N linea RNS parallela ad BC, est autem & MN ipsi DE æquidistans, quare angulus RNM æqualis [a] erit angulo BGD, nempe rectus, & planum transiens per MN, RS [b] æquidistabit plano per BCDE, hoc est basi coni; si igitur planum per MNRS producatur sectio circulus [c] erit, cuius diameter RNS, atque est ad ipsam perpendicularis MN, ergo rectangulum RNS æquale est quadrato MN, vti rectangulum BGC æquale est quadrato DG.

[a] 10. Vndec Elem.
[b] 15 Vndec. Elem.
[c] 4. primi conic.

Iam cum sit NX parallela ad GV, & NS ad GC, erit in prima figura GV ad NX, vt GC ad NS, ob æqualitatem; in reliquis verò erit GV ad NX, vt GH ad HN, vel GC ad NS, ob triangulorum similitudinem; quare permutando in omnibus, GV ad GC, erit vt NX ad NS.

Ampliùs cum in prima figura factum sit vt quadratum FG ad rectãgulum BGC, siue ad quadratum GD, ita recta HF ad FL, vel ad GV ei æqualis ob parallelogrammum FV, erit FG ad GV, vt GV ad GD; quare rectangulum FGV æquatur quadrato DG, siue rectangulo BGC. Item in reliquis figuris, cum factum sit vt rectangulum HGF, ad rectangulum BGC, ita recta HF ad FL, vel HG ad GV, & idem rectangulum HGF ad rectangulum FGV sit vt eadem HG ad GV, erit rectangulum BGC æquale rectangulo FGV: cum ergo in singulis figuris rectangulum BGC æquale sit rectangulo FGV, erit BG ad GF, siue RN ad NF, vt VG ad GC, siue vt XN ad NS: rectangulum ergo RNS, siue quadratum MN æquatur rectangulo XNF. Linea igitur MN potest rectangulum sub XN, & NF, quod adiacet lineæ FL, latitudinem habens FN, in prima figura, sed in secunda ipsum rectangulum excedit, & in tertia & quarta ab eodem deficit, rectangulo sub LO, & OX, simili ei, quod sub HF, & FL continetur. Quod erat demonstrandum.

Definitiones Primæ.

I.

Sectio DFE, cuius diameter FG in prima figura æquidistat AC vni laterum trianguli per axem, vocatur PARABOLE.

II.

Et cuius diameter in secunda figura occurrit vtrique lateri trianguli per axẽ, dicitur HYPERBOLE.

III.

Et cuius diameter, in tertia, & quarta conuenit cum vtroque latere infra verticem trianguli per axem, ELLIPSIS nuncupatur.

IV.

Segmentum verò HF diametri sectionis inter latera trianguli per axem interceptum, in secunda, tertia, & quarta, dicitur LATVS TRANSVERSVM Hyperbolæ, vel Ellipsis, quod in sequentibus intelligatur semper extra Hyperbolen ex ipsius vertice in directum positum cum diametro, licet in constructionibus expressè non dicatũr.

V.

In omnibus autem figuris linea FL, quarto loco inuenta, dicitur LATVS RECTVM sectionis, quod deinceps concipiatur semper contingenter applicari ex sectionis vertice, siue ordinatim ductis æquidistans.

Ambo

VI.

Ambo simul latera FL, FH, FIGVRÆ LATERA nuncupantur.

VII.

Recta verò LV æquidistans diametro sectionis FG, vt & recta HL, figuræ latera sub tendens dicitur FIGVRAM DETERMINANS, seu REGVLATRIX, vel REGVLA.

VIII.

Segmenta insuper diametrorum NF, GF, licet ab ipso Apollonio dicantur latitudines, vocentur potius ALTITVDINES, ita vt NF dicatur altitudo propria semi-applicatæ MN &c.

IX.

Rectæ autem NX, GV, quæ recto lateri FL, siue ordinatim ductis æquidistant, & inter sectionis diametrum, & regulam intercipiuntur, vocentur LATITVDINES, rectangulorum nempe FNX, FGV, quibus semi-applicatarum quadrata NM, GD æqualia sunt ostensa, ita vt XM sit latitudo propria semi - applicatæ MN &c. quæ semi - applicatæ indifferenter, ac sæpius dicentur applicatæ, vel ordinatim ductæ.

COROLL.

Hinc patet, in quacunque coni-sectione, quamlibet semi-applicatam esse mediam proportionalem inter propriam altitudinem, propriamque latitudinem: hoc est quadratum cuiuscunque semi-applicatæ æquari rectangulo sub propria altitudine, ac propria latitudine contento: ostensum est enim tàm in Parabola, quàm in Hyperbola, vel Ellipsi, vel circulo, quadratum semi-applicatæ MN æquari rectangulo FX, quod sub altitudine propria FN, ac sub propria latitudine NX continetur.

MONITVM.



HIC animaduertendum est in hac propositione nos sub-contrariam coni-sectionem non exclusisse, quam Apollonius in eius quinta primi expendens, circulum esse demonstrauit, quoniam ex eo, quod superiùs dictum fuit, elicitur huic etiam competere eandem Ellipsis proprietatem, videlicet ordinatè applicatarum potentias æquari rectangulis, rectæ lineæ quarto loco inuentæ applicatis, latitudinem habentibus ea diametri segmenta, quæ inter ipsas applicatas, ac sectionis verticem intercipiuntur, deficientibusque rectangulis similibus contento sub transuerso rectoque latere, quæ latera in hac sub contraria sectione inter se sunt æqualia, ac penitus eadem cum diametro vnius circuli: quamobrem circulus nihil aliud esse videtur quàm Ellipsis æqualium laterum, habens tamen transuersum latus, quod vicem gerit axis linearum ad ipsum ordinatè ductarum.

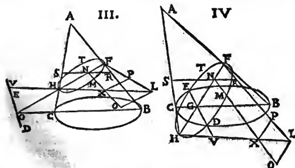
Immo si nostri esset instituti, hic quoque demonstrare possemus non tantum

omnes

omnes Ellipsis affectiones circulo communes esse, sed ferè omnes etiam Hyperbolæ, magnaque pars Parabolæ, præmittendo tamen nouas quasdam animaduersiones, cautionesque perutiles, nemini, quod sciam, adhuc cognitas, præcipuéque vtendo methodo ab ipso Apollonio satis diuersa, certàque industria propositionum figuris characteres disponendo, ad hoc vt eadem demonstratio cuilibet coni-sectioni simul inseruiat, non absimili modo ab eo, quo in superiori Theoremate vsi sumus, ex quibus maximum doctrinæ conicæ compendium oriretur; sed quoniam id, plus laboris, ac temporis, quam ingenij requireret, libenter opus relinquo ijs, quibus multum ocij suppetit, & quos magis iuuat in alienas lucubrationes commentaria scribere, quàm vel ipsas latiùs promouere, vel nouas meditari, ac geometricè demonstrare.

Quod autem in Apollonij subcontraria sectione transuersum, rectumque latus reperiatur eadem methodo, rationeque illorum rectangulorum qua vtimur in præcedenti, quodque hæc ipsa latera inter se sint æqualia manifestum fiet ex eo, quod mox demonstrabimus non tantum in prædicta sectione subcontraria, quæ recta est plano trianguli per axem recto plano basis coni scaleni, sed etiam ei, quæ secat planum basis coni secundum rectam lineam perpendicularem basi cuiuscunq; trianguli per axem non isoscelis, vel ei, quæ ipsi basi indirectum producitur, dummodò talis sectio ex ipsomet triangulo, triangulum auferat sibi simile, sed subcontrariè positum.

Repetitis igitur duabus vltimis præcedentibus figuris, intelligatur coni ABC scalenum esse, sectumque plano per axem, quodcunque triangulum efficiente ABC, dummodo non sit æquicrure, (quod per doctrinam lib. secundi Sereni, vnicum est) habente idcircò vnum latus altero maius,



sitque

ſitque ipſum AB, quod ſecetur quacunque recta linea FN intra angulum BAC, efficiens angulum AFN æquale angulo ACB. Iam dico rectam FN productam cum reliquo latere AC conuenire, cumque basi BC ad partem minoris lateris AC.

Quoniam cum in triangulo BAC ſint anguli A, C, minores duobus rectis, permutato C in F, erunt anguli FAC, AFN duobus rectis minores, ex quo rectæ AC, FN conuenient ſimul in H, & reliquus angulus ABC in triangulo BAC æquabitur reliquo angulo AHF in triangulo HAF, hoc eſt triangula BAC, HAF erunt ſub contrariè poſita. Amplius cum ſit BA maior AC, erit HA maior AF, propter ſimilitudinem triangulorum BAC, HAF, vnde angulus AFH erit maior angulo AHF, ſiue angulo ABC, ſed anguli BFH, AFH ſunt duobus rectis æquales, quare anguli BFH, ABC minores erunt duobus rectis, ideoque FH, BC ſimul conuenient, vt in G. Nunc verò concipiatur per rectam FHG duci planum ſecans triangulum per axem ABC, communiſque ſectio huius ſecantis plani cum plano baſis coni ſit recta DGE perpendicularis baſi BC trianguli per axem, & cum conica ſuperficie ſectionem efficiens MFTH, cuius diameter ſit FH. Itaque iam ſuperiùs oſtenſum eſt, ſi fiat vt rectangulum FGH ad rectangulum BGC, ita diameter FH ad aliam lineam FL, quæ ex F ordinatim in ſectione ductis æquidiſtet, iungaturque HL, quadratum cuiuſcunque applicatæ MN parallelæ communi ſectioni DE, æquari rectangulo NP, applicato rectę FL deficientique rectangulo LX ſimili rectangulo ſub HF, FL. Quod verò talia latera HF, FL inter ſe ſint æqualia ita oſtenditur.

Cum ſit enim angulus AFH æqualis angulo ACB, erit conſequens BFG conſequenti HCG æqualis, eſtque angulus BGF æqualis angulo HGC, cum in tertia figura idem ſint, in quarta verò ſint ad verticem, quare in triangulis BGF; HGC circa æquales angulos ad G erunt latera proportionalia, ſiue vt FG ad GB ita CG ad GH, ideoque rectangulum FGH æquale erit rectangulo BGC, ſed vt rectangulum FGH ad BGC, ita tranſuerſum HF ad rectum FL,

ctum FL, iſtaque rectangula æqualia oſtenſa ſunt, vnde latera quoq; HF, FL æqualia erunt. Quod demonſtrandum erat.

Sed quoniam [a] eſt vt tranſuerſum HF ad rectum FL ita rectangulum HNF ad quadratum NM, atque hæc ipſa latera æqualia ſunt oſtenſa, ergo rectangulum HNF æquabitur quadrato NM; quare in qualibet ſubcontraria ſectione MFTH, deducta, vt in præcedenti, ex triangulo per axem coni ſcaleni, quod tamen non ſit æquicrure, rectangula ſub ſegmentis diametri ſunt ſemper æqualia quadratis eorum ordinatè applicatarum, quæ quando cum diametro FH rectos angulos conſtituent, (quod eueniet cum communis ſectio DGE perpendicularis fuerit, non ſolùm baſi BGC trianguli per axem, ſed etiam rectæ FHG communi ſectioni plani ſecantis cum prædicto triangulo, hoc eſt quando triangulum per axem BAC rectum fuerit baſi coni BC, nam tunc DGE communis ſectio plani ſecantis FH cum plano baſis coni BC, cum poſita ſit perpendicularis rectæ BGC, quæ eſt communis ſectio trianguli per axem cum plano baſis coni, perpendicularis etiam [b] erit plano trianguli BAC, vnde cum recta GHF rectos angulos faciet, ideoq; omnes in ſectione MFT ordinatim ductæ, ſiue ipſi DGE æquidiſtantes, eidem GFH erunt perpendiculares) Ellipſim efficient æqualium laterum circa axim FH, quæ eadem erit, ac circulus diametri FH. Si verò prædictæ applicatæ ad obliquos angulos diametrum ſecabunt (quod accidet cum DGE obliquè ſecat rectam FHG) tunc ipſa ſectio erit pariter Ellipſis æqualium laterum, ſed eius tranſuerſum latus, diameter erit non autem axis.

[a] 21. primi conic.

[b] 4. def. lib. 11. Elem.

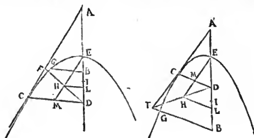
Non ſemper igitur ſubcontraria ſectione coni ſcaleni efficitur circulus, ſed ſolùm cum triangulum per axem rectum eſt baſi coni, quo in caſu, vt viſum eſt, ei debetur eadem proprietas, ac Ellipſi, æqualium tamen laterum circa axim. In ſectionibus autem ſubcontrarijs cuiuslibet alterius trianguli per axem (dummodo non ſit triangulum æquicrure, quia tunc communis ſectio plani ſecantis cum ipſo triangulo non conuenit cum baſi eiuſdem trianguli, ſed ei æquidiſtat) oritur Ellipſis æqualium item laterum, ſed circa diametrum, quæ obliquè ſecat applicatas. Hinc ergo liquidò conſtat in ſuperiori propoſitione opus non fuiſſe ſubcontrariam ſectionem reijcere, vti fit ab ipſo Apoll. in 13. primi, atque ab alijs doctrinam conicam pertractantibus: ſed hæc obiter delibaſſe ſufficiat; quo etiam nomine liceat mihi inſequentes demonſtrationes proferre, non tam vt deſiderio obſequar hominis mihi amiciſsimi, quam vt alteri cuidam, quocum iam ab hinc multis annis illas, nec non plures alias communicaui, in mentem redigam, eas, non eius, ſed quidquid ſunt ingenioli mei eſſe inuenta; atque ita periculo occurram, ne ille, non dicam fidei, ſed memoriæ forſan defectu ſibi eas aſciſcat. Hoc autem audentius faciam, cum eæ non omnino ab inſtituto opere ſint alienæ, verſantur enim circa tangentes coni-ſectionum ab Apoll. acutiſsimè quidem inuentas, ac negatiuè oſtenſas in eius 33. ac 34. primi, à me autem neſcio an breuiùs, euidentiùs certè affirmatiuèque demonſtratas, ac Problematicè propoſitas, vt in ſequentibus.

PROBL. I. PROP. II.

Datæ Parabolæ per punctum in ea datum lineam contingentem ducere.

Sit Parabole, cuius diameter AB, & datum in ea punctum sit C. Oportet ex C Parabolæ contingentem rectam lineam ducere.

Prop. 33. primi conic. Applicetur ordinatim recta CD, & diametri segmento DE æqualis ponatur EA, iungaturque ACF. Dico ipsam esse tangentem quæsitam.



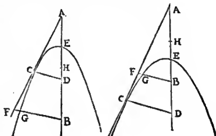
Sumpto enim in sectione quolibet puncto G, per eum applicetur BGF rectam AC secans in F, diametrum verò in B, & iuncta DF ex E vertice ducatur EHM parallela ad AF secans DF in H, & CD in M, sitque HL ipsi FB æquidistans. Iam cum sit AE æqualis ED, erit FH æqualis HD, ob parallelas AF, EH; itemque BL æqualis LB ob æquidistantes BF, LH: quare sumpta EI media geometrica inter DE, & EB ipsa EI minor erit media arithmetica EL. Amplius quadratum GB ad CD *a* est vt linea EB ad ED, vel vt quadratum mediæ geometricæ EI ad quadratum ED, ergo & linea GB ad CD erit vt EI ad ED, cumque sit EI minor EL, habebit EI ad ED: siue GB ad CD, minorem rationem quàm EL ad ED, vel quàm EH ad EM, seu quàm AF ad AC, vel quàm FB ad eandem CD, ergo GB minor est FB: quare punctum F cadit extra Parabolen, & sic de quolibet alio puncto rectæ ACF. Vnde ipsa ACF Parabolen contingit in C. Quod faciendum erat.

a 20 primi conic.

ALITER.

Isdem positis, dico iterum punctum F cadere extra Parabolen. Nam secta AB bifariam in H, cum eadem quoque in æqualiter secta sit in E (nã cum sit DE æqualis EA, erit in prima figura BE maior EA, & in secunda BE minor EA) erit rectangulum AHB maius rectangulo AEB, ac propterea quadratum EA ad rectangulum AHB, siue ad quadratum AH minorem habebit

bebit rationem quàm idem quadratum E A ad rectangulum A E B, & quatuor quadrata E A, siue vnicum quadratum AD, ad quatuor quadrata A H, siue ad vnicum quadratum A B minorem habebit rationem quàm quadratum E A ad rectangulum



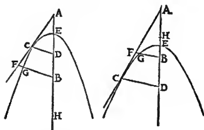
A E B, sed quadratum A D ad A B est vt quadratum C D ad F B, & quadratum E A ad rectangulum A E B est vt quadratum E D ad rectangulum B E D, cum sit A E æqualis E D, vel vt recta E D ad rectam E B, vel vt [a] quadratum C D ad quadratum G B, quare quadratum C D ad F B minorem habebit rationem quàm idem quadratum C D ad quadratum G B, ergo quadratum F B maius est quadrato G B, vnde punctum F cadit extra Parabolen, & sic de quolibet alio puncto rectæ A C F, præter C. Quare ducta est per datum punctum C recta A C F Parabolen contingens. Quod erat faciendum,

[a] 20. primi conic.

A L I T E R.

Positis iisdem. Dico iterum, vt supra.

Sumatur enim post D A, A B tertia proportionalis A H, erit aggregatum extremarum A D, A H maius quàm duplum mediæ A B, siue maius quàm duplum A E cum E B, sed est A D dupla ad A E, ergo A H erit maior quàm dupla E B, sed est A D dupla D E, ergo A D ad D E minorem habet rationem quàm A H ad E B, & permutando D A ad A H minorem



habet rationem quàm D E ad E B, sed D A ad A H, est vt quadratum D A ad quadratum A B, vel vt quadratum D C ad quadratum B F, & D E ad E B, [b] est vt quadratum D C ad quadratum B G, ergo quadratum D C ad quadratum B F minorem habet rationem quàm idem quadratum

[b] ibidem.

dratum D C ad quadratum B G, quare quadratum B F maius est quadrato B G; ideoque punctum F cadit extra sectionem, vt & quodcunque aliud punctum rectæ A C F, præter C. Erit ergo recta A C F Parabolen contingens in in C. Quod erat faciendum.

MONITVM.

P*Ropositio 34. primi conic. licet ab Apollonio negatiuè sit demonstrata, facilè tamen ad affirmatiuam reducitur, si ex ipsa in principio demantur ea verba*. Si enim fieri potest, secet vt E C F, *ad finem verò*. Quod fieri non potest; *nam ibi linea H G ostenditur minor G F, vnde punctum F cadet extra sectionem, & sic quodcunque aliud punctum rectæ E C H præter C, quare ipsa E C H sectionem continget in C: sed vt clarius idem pateat, en afferemus nostram directè conclusam demonstrationem, de qua in præcedenti Monito, præmisso tantum (vice propositionis 169. septimi Pappi, qua indiget Apolloniana propositio) sequenti Lemmate, in quo interim duæ simul circuli proprietates detegentur haud iniucundæ.*

LEMMA I. PROP. III.

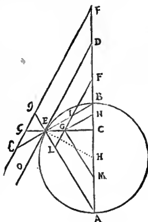
Si circuli diameter A B inæqualiter secetur in C, & ad minorem partem C B producatur, ita vt sit A D ad D B, vt A C ad C B, & ex C erigatur perpendicularis C E, iungaturque D E. Dico quadratum ipsius D E æquari rectangulo A D B.

Si verò in recto angulo D C E, quælibet alia subtensa F G applicetur ipsi D E æquidistans, productam diametri partem secans in F, aut infra D, aut supra, & perpendicularem C E in G. Dico ampliùs quadratum applicatæ F G semper excedere rectangulum A F B.

QVò ad primum, sit circuli centrum H, & iungatur H E. Iam cum sit A D ad D B, vt A C ad C B, erit componendo A D cum D B ad D B, vt A B ad B C, & sumptis antecedentium subduplis, erit H D ad D B, vt H B ad B C, & per conuersionem rationis D H ad H B, vt B H ad H C, vel vt D H ad H E (ipsi H B æqualis) ita H E ad H C: quare triangula D H E, E H C, cum habeant circa communem angulnm H latera proportionalia, similia erunt, vnde angulus D E H æquabitur angulo E C H, siue rectus erit, ideoque D E circulum continget, hoc est quadratum D E æquabitur rectangulo A D B. Quod primò, &c.

Ampliùs iungantur E B, E A, quas, recta F G producta secet, in I & L, &

L, & cadat primùm applicata FG infra contingentem DE, sitque GM ipsi EA, & GN ipsi EB parallela.



Iam cum sit GF parallela ad ED, GM ad EA, & GN ad EB, erit triangulum ADE simile triãgulo MFG, & triangulum EDB simile triangulo GFN, quare vt AD ad DE, ita MF ad FG, & vt ED ad DB, ita GF ad FN; suntque AD, DE, DB continuę proportionales, vnde MF, FG, FN, erunt quoque proportionales, siue rectangulum MFN ęquabitur quadrato FG.

Præterea cum BE circulum contingat, & EB secet, erit angulus DEB æqualis angulo BAE, sed (cum triangula BEC, BAE in semicirculo sint similia) est quoque angulus BEC, æqualis angulo BAE, ergo angulus DEB, siue alternus EIG æqualis erit angulo BEC, ergo linea GI ipsi GE æqualis. Item angulus OEA æquatur angulo ABE in alterna portione, siue angulo AEC, estque angulus OEA alterno GLE æqualis, vnde anguli AEC, GLE æquales erunt, quare linea GL æqualis eidem GE; erunt ergo LG, GI inter se æquales, sed est GF maior IF, habebit ergo LG ad GF minorem rationem quàm GI ad IF, & componendo LF, ad FG, siue AF ad FM minorem rationem quàm GF ad FI, vel quàm NF ad FB, quare rectangnlum sub extremis AF, FB, minus *a* erit rectangulo sub medijs MF, FN, siue minus quadrato FG. Quod demonstrandum erat. *a* 16 sept. Pappi.

Idem penitùs ostendetur, quando applicata *FG* productæ diametro occurrat vltra D; nam adhibitis angulis ad verticem E, alternisque parallelarum, item demonstrabitur *IG* ipsi *GL* æqualem esse, & ex *G* facta simili constructione, demonstratio, & conclusio omninò erit eadem, ac supra.

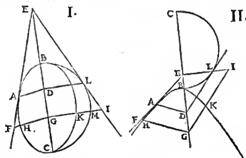
PROBL. II. PROP. IV.

Datæ Hyperbolæ, vel Ellipsi, per punctum in ea datum contingentem lineam ducere. Prop. 34. primi conic.

Sit Ellipsis, vel Hyperbolæ ABK, cuius transuersum latus sit BC, & datum in sectione punctum sit A; extra verticem B: oportet ex A datæ sectioni contingentem lineam ducere.

Ex dato puncto A ordinatim applicetur A D, occurrens diametro in D, & fiat vt CD ad DB, ita CE ad EB, iungaturque E A: dico ipsam E A sectionem contingere.

Etenim sumpto in ea quocunque puncto F, vel supra, vel infra A, ordinatim agatur FHG, sectionem secans in H, diametrum in G, & super transuerso B C describatur semicirculus B L C, cuius diametro B C in Ellipsi ex puncto D erigatur perpendicularis D L, iungaturque E L, quæ, per Lemma antecedens, erit ipsi circulo contingens in L. At in Hyperbola ex E puncto ducta sit diametro CB perpendicularis EL, iungaturque D L, quæ item, ob præmissum Lemma, semi-circulum BLC continget in L, & ex G ipsi DL æquidistans ducatur GI semi-circulum



primæ figuræ secans in M, in qua cum sit ELI contingens in L, erit applicata GI maior GM, siue quadratum GI maius quadrato GM, vel maius rectangulo CGB, sed est quoque, per idem Lemma, quadratum GI (in secunda figura) maius rectangulo CGB, quare in vtraque figura quadratum GI ad quadratum DL, vel quadratum GE ad quadratum ED, vel quadratnm GF ad quadratum D A, maiorem habebit rationem quàm rectangulum CGB ad idem quadratum D L, vel ad rectangulum CDB, sed vt rectangulum CGB ad rectangulum C D B, ita [a] quadratum G H ad quadratum D A, ergo quadratum G F ad quadratum D A maiorem habet rationem quàm quadratum G H ad idem quadratum D A; quare quadratum GF maius est quadrato GH: vnde punctum F cadit extra sectionem, & sic de quibuslibet alijs punctis rectæ EAF, præter A. Ducta est ergo E A sectionem contingens in A. Quod erat faciendum.

[a] 21. primi conic.

MONI-

MONITVM.

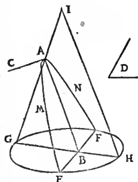


T aliquando ad rem nostram accedamus, quoniam in hac de MAXIMIS, & MINIMIS tractatione frequenter nobis est opus conicas sectiones circa datam diametrum, per datum verticem, cum datis lateribus, cùmque applicatis angulum dato æqualem cum diametro efficientibus describere, quæ omnia quidem nos docet Apoll. in 52. 53. 54. primi conic. ad quas itaque vsu existente confugiendum esset; attamen cum hæ sint forsan longissimæ, ac difficillimæ omnium demonstrationum in quatuor conicorum libris contentarum, eò quod ipsarum quælibet in duos casus distribuatur, variaque ibi Lemmata requirantur à Pappo, Eutocio, & Commandino suppleta; consentaneum visum est nostras hic quoque horum problematum solutiones afferre, quæ expeditiores, admodumque faciles nobis videntur, vniuersaliter singulas ostendendo, absque vsu prædictorum, vel aliorum Lemmatum, vt mox videre licet.

PROBL. III. PROP. V.

Data in quodam plano recta linea ad vnum punctum terminata, inuenire in dato plano coni-sectionem, quæ Parabole appellatur, cuius diameter sit data linea, vertex eius terminus, rectum verò latus sit altera quædam linea magnitudine data, & ad diametrū ordinatim ductæ in dato angulo applicentur. Prop. 52. pri. con.

Sit in subiecto plano recta linea AB data positione ad punctum A terminata, altera autem recta magnitudine data sit AC, & datus angulus sit D. Oportet in subiecto plano Parabolen describere, cuius diameter sit AB vertex A, rectum figuræ latus sit AC, & ordinatim ductæ ad diametrū in angulo D applicentur.



Sumatur in AB quodcunque punctum B, per quod in subiecto plano, in quo AB, ducatur recta EBF ad angulum ABF, qui dato D sit æqualis, sumanturque hinc inde BE, & BF inter se æquales, vtraque verò sit media proportionalis inter BA, & datam AC, & per rectā EF intelligatur quodcunque planum GEHF, quod non sit idem cum plano per rectas EF, AB

tran-

tranſeunte, & horum communis ſectio ſit recta EF, cui in plano GEH perpendicularis ducatur recta GBH ad vtramque partem plani AEF producta, in qua ſumpto quocunq; puncto G, fiat, vt GB ad BE, ita BE ad BH; (& erit rectangulum BGH æquale quadrato BE, vel BF) iungaturque GBA, & per H in plano per HG, & GA ducto agatur recta HI ipſi BA parallela.

Itaque cum GH, EF in vno ſint plano, ac inter ſe perpendiculares, ſitque rectangulum GBH æquale quadrato vtriuſque EB, BF, ſi circa GH, tanquam diametrum deſcribatur circulus GEHF, ipſe tranſibit per E, & F. Si ergo intelligatur recta IAG circa peripheriam circuli GE, HF conuerti, manente eius extremo puncto I, deſcribetur conus IGH cuius vertex I, baſis circulus GH, & communis ſectio conicæ ſuperficiei cum ſubiecto plano erit linea EMANF, quam dico eſſe Parabolen quæſitam.

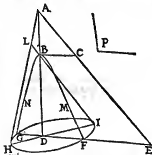
Conus enim IGH, cuius vertex I, & baſis diameter GH ſecatur plano per axem deſcribet triãgulum GIH; ſecatur autem, & altero plano EAF (quod eſt datum ſubiectum planum) baſi coni non æquidiſtante, cum eam ſecet, ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam EF, quæ ad GH baſim trianguli per axem eſt perpendicularis, atque eſt AB diameter ſectionis EAF vni laterum HI trianguli per axem æquidiſtans, talis ſectio EAF per primam huius erit Parabola, cuius diameter AB, vertex A, & ordinatim ducta EF, quæ ipſi diametro ad angulum ABF, dato angulo D æqualem, applicata eſt, ex ipſa conſtructione. Et cum factum ſit vt AB, ad BE, ita BE ad AC, erit quadratum AB ad quadratum BE, vel ad rectangulum GBH, vt AB ad AC. Quare AC erit rectum latus Parabolæ EMANF, deſcriptæ vti quærebatur: Quod erat faciendum.

* * *

PROBL. IV. PROP. VI.

Data in quodam plano recta linea terminata, quæ ad alteram partem in infinitum producatur: inuenire in dato plano coni-sectionem, quę dicitur Hyperbole, cuius diameter sit producta linea, vertex eius terminus, transuersum latus sit data linea terminata, rectum verò sit alia quæcunque data linea finita, & ipsius diametrũ ordinatim ductæ efficiant angulos dato angulo æquales. Prop.53. primi conic.

Sint datæ rectæ lineæ terminatæ AB, BC, quæ in subiecto plano ad angulum ABC, dato angulo P æqualem constituantur, & harum altera AB sit vtcunque producta ad BD: oportet in subiecto plano Hyperbolen describere, cuius diameter sit BD, vertex B, transuersum latus AB rectum BC, & ordinatim ductæ diametrũ BD constituant angulos, dato, angulo P æquales.



Iungatur AC, & producatur, sumaturq; in BD quodlibet punctum D, per quod agatur in subiecto plano recta linea DE ipsi BC parallela, à qua, hinc inde producta, demantur partes DF, DG, quæ sint mediæ proportionales inter BD, & DE; & per rectam FG intelligatur planum IFHG, diuersum à plano, quod per AD, & FG transit, quorum cōmunis sectio sit recta FG, cui per D in plano IFHG perpendicularis ducatur IDH, in qua, ad partes I, sumptum sit quodcunque punctum I, & fiat vt ID ad DF, ita DF ad DH; & erit rectangulum IDH æquale quadrato DF, & quadrato DG, sed rectæ IH, FG se mutuò secant ad rectos angulos in D, quare si circa IH circulus describatur, transibit ipse per puncta FG. Tandem iungatur HA, & IB producatur secans AH in L, & intelligatur conus cuius vertex L, basis circulus IH, & cōmunis sectio superficiei conicæ cum subiecto plano sit linea FMBNG. Dico hanc esse quæsitam Hyperbolen.

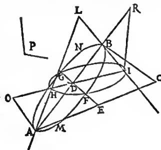
Conus enim LIH, cuius vertex L, & diameter basis, IH, plano per axem secatur triangulum faciens LIH, & secatur altero plano (quod est datum planum subiectum) secante basim coni secundum rectam lineam FG, quæ ad IH basim trianguli per axem, est perpendicularis, & communis sectio subiecti plani, & trianguli per axem, hoc est DB, producta ad B conuenit cum altero latere HL extra verticem producto in puncto A, erit, per primam huius, sectio FBG Hyperbole, cuius vertex B, diameter BD, & ordinatim ductæ FG cum diametro BD, ad angulum FDB, angulo CBA, seu dato P æqualem applicantur, ex constructione. Cumque factum sit vt BD, ad DF ita DF ad DE, erit rectangulum EDB æquale quadrato DF, siue rectangulo

IDH: quare rectangulum ADB ad rectangulum EDB, erit vt idem ADB ad IDH, sed ADB ad EDB, est vt AD ad DE, vel vt AB ad BC, ergo rectangulum quoque ADB ad rectangulum IDH, erit vt AB ad BC. Sequitur ergo vt AB sit transuersum latus, & BC rectum descriptæ Hyperbolæ, vt in prima huius ostensum est. Quod erat faciendum.

PROBL. V. PROP. VII.

Prop. 54. pri. con. Duabus datis in subiecto plano rectis lineis terminatis, inuenire in eodem plano circa ipsarum alteram, tanquam circà diametrum, coni-sectionem, quæ Ellipsis appellatur, cuius transuersum latus sit prædicta diameter, rectum verò latus sit altera data linea, & diametrū ordinatim ductæ in dato angulo applicentur.

Sint datæ in subiecto plano terminatę rectæ lineæ AB, BC, quæ ad datum angulum P componantur. Oportet in subiecto plano Ellipsim describere, cuius diameter sit AB, vertex B, transuersum latus AB, rectum BC, & diametrū AB ordinatim ductæ constituant angulos dato, angulo P æquales.



Iungatur AC, sumaturque in AB quodcunque punctum D, à quo ducatur, in subiecto plano, recta GDFE ipsi BC parallela, è qua ex vtraque parte abscindantur DF, DG mediæ proportionales inter BD, & DE; erit vtriusq; ipsarum quadratum ęquale rectãgulo EDB: per rectam autem FG intelligatur secans planum IFGHG ad vtramque partem subiecti plani productum, quorum communis sectio sit recta FG, cui per D in plano secante IFHG, perpendicularis ducatur IDH hic inde producta.

Iam, vel est CB non maior BA, vel maior. Si non maior, erit quoque ED non maior ipsa DA. Itaque ex educta IDH infra subiectum planum dematur DI, quæ maior sit ipsa DB, iungatur IB, & ex A ducatur AO parallela ad IB, secans IDH in O, & fiat vt ID ad DF, ita DF ad aliam DH; erit rectangulum IDH æquale quadrato D F, siue rectangulo EDB, sed rectangulum EDB est non maius rectangulo ADB (nam est ED non maior recta DA) ergo rectangulum IDH erit non maius rectangulo BDA, sed rectangulum IDO maius est rectangulo BDA (nam cum sit vt ID ad DB, ita OD ad DA, sitque ID maior DB ex constructione, erit quoque DO maior DA) quare IDH rectangulum minus erit rectangulo IDO, hoc est linea DH minor DO; vnde punctum H est inter D, & O, siue inter parallelas IB, AO; quare iuncta AH, & producta secabit productam IB ad partes B, L, vt putà in L.

Si

Si verò CB fuerit maior BA, erit quoque ED maior DA, & tunc ex educta IDH supra subiectum planum dematur DH, quæ minor sit ipsa DA, & iungatur AH, & fiat vt HD ad DF, ita DF ad DI; erit rectangulum HDI æquale quadrato DF, siue rectangulo EDB, sed rectangulum EDB maius est rectangulo ADB, cum sit ED maior DA, quare rectangulum HDI maius erit rectangulo ADB. Iam ex I ducatur IR parallela ad AH, secans productam AD in R; erit HD ad DA, vt ID ad DR; sed HD facta est minor DA, ergo & ID erit minor DR, vnde rectangulum sub maioribus AD, DR, maius erit rectangulo sub minoribus HD, DI; sed rectangulum HDI demonstratum est maius rectangulo ADB, ergo rectangulum ADR eò amplius maius erit rectangulo ADB: vnde recta BR maior erit recta DB, hoc est punctum B cadet inter D, & R, siue inter parallelas AH, IR; quare iuncta I B, & producta conueniet cum producta AH ad partes B, H, veluti in L.

His itaque constructis, & demonstratis; cum factum sit vt ID ad DF, vel ad DG, ita DG ad DH, si circa diametrum IH in plano secante describatur circulus ipse transibit per puncta F, G: si ergo intelligatur descriptus conus, cuius vertex L, basis circulus IFHG; & in infinitum productus infra basim, communis sectio eius conicæ superficiei cum subiecto plano sit linea AMF BGNA. Dico hanc esse Ellipsim quæsitam.

Est enim conus ILH sectus plano per axem, triangulum faciens LIH, & secatur altero plano FBGA, (nempe subiecto plano) quod basi non æquidistat (cum se mutuò secent secundum rectam FG) & communis sectio basis coni I H, & secantis plani BA est recta linea FG, quæ ad IH basim trianguli per axem est ducta perpendicularis, erit, per primam huius, sectio AMFBGN Ellipsis, cuius vertex B, diameter BA, cui ordinatim ductæ, qualis est FG, ad datum angulum P applicantur ex constructione. Cumque factum sit vt ED ad DF, ita DF ad DB, erit rectangulum EDB æquale quadrato DF, siue rectangulo IDH, vnde rectangulum ADB, ad rectangulum EDB, erit vt idem rectangulum ADB, ad rectangulum IDH; sed rectangulum ADB ad EDB, est vt AD ad DE, vel vt AB ad BC, ergo rectangulum ADB, ad rectangulum IDH, erit vt AB ad BC: vnde AB est latus transuersum, BC verò rectum descriptæ Ellipsis BFAG, vt ex prima huius. Quod erat faciendum.

MONITVM.



Vm ad MAXIMARVM, MINIMARVMque coni-sectionum inscriptibilium, ac circumscriptibilium inuentionem nobis sit opus admirandam illam affectionem propagare circa lineas semper magis, ac magis inter se accedentes, nunquam verò simul coeuntes, ab ipso Apollonio præcipuè animaduersam inter curuam Hyperbolæ, rectamque lineam, quàm ipse Asymptoton appellauit, necessè quidem videretur, ad hoc vt integram huius argumenti doctrinam hic simul habeatur, addere nunc, primam, secundam, decimam tertiam, ac decimam quartam secundi conicorum ad prædictam Asymptoton spectantes; sed

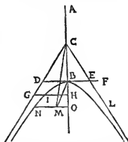
quoniam harum quoque habemus demonstrationes breuiores, & affirmatiuas, non indirectas, quales ab Apollonio exhibentur in prima, secunda, ac decima tertia, nè nostri libelli molem aliunde transcriptis demonstrationibus augere velle videamur, apponemus hic proprias, ita procedendo.

THEOR. II. PROP. VIII.

Prop. 1.2 secundi conic.

Si Hyperbolen recta linea ad verticem contingat, & ab ipsa ex vertice ad vtramque partem diametri sumatur æqualis ei, quæ potest quartam figuræ partem, quæ à sectionis centro ad sumptos terminos contingentis ducuntur cum sectione non conuenient; (quæ in posterum cum Apollonio vocentur ASYMPTOTI) nec erit altera asymptotos, quæ diuidat angulum ab ipsis factum.

SIt Hyperbole, cuius diameter, & transuersum latus AB, centrum C, & rectum figuræ latus BF, linea verò DE sectionem contingat in B, & quartæ parti figuræ, quæ à lateribus AB, BF continetur æquale sit quadratum vtriusque ipsarum BD, BE, & iunctæ CD, CE producantur. Dico primùm eas cum sectione numquam conuenire.



Nam in altera ipsarum, vt in CD, infra contingentem, sumpto quolibet puncto G, ab eo ordinatim applicetur GIH sectionem, ac diametrum secans in I, H, quæ ipsi DB æquidistabit. Et quoniam est vt latus AB ad BF, ita quadratum AB ad rectangulum ABF, vel sumptis horum sub-quadruplis, ita quadratum CB ad quadratum BD, vel quadratum CH ad quadratum HG, & vt idem latus AB ad BF ita a est rectangulum AHB ad quadratum HI, erit quadratum CH ad HG, vt rectangulum AHB ad quadratum HI, & permutando quadratum CH ad rectangulum AHB, vt quadratum GH, ad HI, sed quadratum CH maius est rectangulo AHB (cum eius excessus sit quadratum CB, nam est AB secta bifariam in C, & ei adiecta est quædam BH) quare & quadratum GH quadrato IH maius erit, hoc est punctum G cadet extra Hyperbolen, & hoc semper de omnibus punctis rectarum CDG, CEL quamuis in infinitum productarum. Sunt igitur lineæ CD, CE sectioni nunquam occurrentes. Quod erat primò demonstrandum, talesque lineæ vocentur ASYMPTOTI.

a 21. primi conic.

Amplius, ijsdem manentibus, dico quamlibet aliam CM, quæ diuidat angulum DCE, necessariò Hyperbolen secare. Ducta enim BM, ex vertice B, parallela ad CD, conueniet cum CM; nam & ipsa CM cum altera æquidistantium CD conuenit in C: occurrat ergo in M, per quod ordinatim appli-

pli-

plicetur NMO sectionem, ac diametrum secans in N, O.

Quoniam igitur eodem penitus argumento, quo superius demonstratum est rectangulum AHB ad quadratum HI, esse vt quadratum CB ad BD, est quoque rectangulum AOB ad quadratum ON, vt idem quadratum CB ad BD, vel vt quadratum BO ad OM, erit permutando, rectangulum AOB ad quadratum BO, vt quadratum NO ad OM, sed rectangulum AOB superat quadratum BO, (excessus enim est rectangulum ABO) ergo & quadratum NO, maius est quadrato MO; sed punctum N est in ipsa sectione, quare punctum M cadit intra: ideoque iuncta CM sectionem prius secat. Non est ergo altera asymptotos, quæ diuidat angulum ab asymptotis factum. Quod erat secundò demonstrandum.

MONITVM.

*Is itaque præostensis, ipsarum ope, ac tertiæ secundi conicorum demonstremus aliter decimam quartam eiusdem, absq; auxilio præcedentium 5. 10. 12. ac 13. quibus ipsa 14. indiget, præmisso tantum sequenti Lemmate.*

LEMMA II. PROP. IX.

Sit rectangulum ABD æquale quadrato BC. Dico addita quacunque BE, rectangulum AED maius esse quadrato EC.

CVm enim rectangulum ABD æquale sit quadrato mediæ BC, erit AB ad BC, vt BC ad BD, & diuidendo, & permutando AC ad CD, vt CB ad BD. Et cum sit DB minor DE, habebit CD ad DB maiorem rationem quam ad DE, & componendo CB ad BD, hoc est AC ad CD maiorem [a] habebit rationem quam CE ad ED, & permutando AC ad CE [b] maiorem rationem quam CD ad DE, & componendo AE ad EC [c] maiorem quam EC ad ED. Si fiat ergo vt AE ad EC, ita EC ad EF, habebit quoque EC ad EF maiorem rationem quam EC ad ED, vnde EF erit minor ED, sed (cum factum sit AE ad EC, vt EC ad EF) rectangulum AEF æquale est quadrato EC, quare rectangulum AED maius erit quadrato EC. Quod erat &c.



a 28. quinti elem.
b 27 quinti elem.
c 28. quinti elem.

THEOR. III. PROP. X.

Asymptoti, & sectio in infinitum productæ ad se propiùs accedunt, & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo. Prop. 14. sec. con.

SIt Hyperbole, cuius asymptoti CD, CE, & datum interuallum sit M. Dico asymptotos CD, CE, & sectionem productas, ad se se propius accedere, & ad interuallum peruenire minus dato interuallo M.

Nam

Nam sit quæcunque recta DBE sectionem contingens in B: patet per 3. sec. conic. ipsam DE cum vtraque asymptoto conuenire, & ad tactum B secari bifariam, & quadratum vtriusque portionis DB, BE æquale esse quartę parti figuræ, quæ ad diametrum CB per tactum ducta constituitur; quare si fiat CA æqualis CB, appliceturque quælibet GIH ipsi DB æquidistans, asymptoton, sectionem, ac diametrum secans in G, I, H, & per I ducatur IP parallela ad CD, secans diametrum in P infra C (nam punctum I est intra angulum GCH) erit vt in præcedenti ostensum fuit rectangulum AHB ad quadratum HI vt quadratum CB ad quadratum BD, vel vt quadratum PH ad quadratum HI; vnde rectangulum AHB æquale erit quadrato HP, siue recta HP erit media proportionalis inter AH & HB; hoc est punctum P cadet inter C & B; quare IP, quæ ipsi GC æquidistat contingentem BD secabit in Q, eritque BD maior DQ, siue maior intercepta GI.

Iam applicata infra G qualibet alia RN diametro occurrente in O, ex N ducta sit NS parallela ad RC, quæ contingentem BD, ac diametrum secabit vt supra in T & S. Cumque rectangulum AHB sit æquale quadrato HP, vt modò ostendimus, sitque in directum ipsi AH addita quædam HO, erit, per præcedens Lemma, rectangulum AOB maius quadrato OP, sed rectangulum AOB eadem ratione, vt supra, ostenditur æquale quadrato OS; quare quadratum OS maius est quadrato OP, hoc est punctum S cadit inter C, & P, siue CP est maior CS, vel DQ maior DT, hoc est GI maior RN. Quare asymptotos CD, & sectio BIN quæ in infinitum productæ, nunquam simul conueniunt, ad se propiùs accedunt; idemque de asymptoto CE. Quod erat primò &c.

Præterea dico ipsas ad interuallum peruenire minus dato interuallo M.

Sumatur DT ex cõtingente BD, quę sit minor interuallo M, & per T agatur STN parallela ad CD diametro occurrens in S, seceturq; SV æqualis SB,

& fiat

& fiat vt AV ad VS, ita AS ad SO, & per O ordinatim applicetur ONR sectionem secans in N, rectam verò ST in X. Et cum sit vt AS ad SO, ita AV ad VS, erit componendo AO ad OS, vt AS ad SV, vel vt AS ad SB, & permutando, & per conuersionem rationis, vt AO ad OS, ita SO ad OB, ergo rectangulum AOB æquatur quadrato OS: sed rectangulum AOB ad quadratum suæ ordinatim ductæ ON in Hyperbola semper est vt quadratum CB ad BD (vt iam superius ostendimus) vel vt quadratum SO ad OX: quare permutando rectangulum AOB ad quadratum SO, erit vt quadratum ON ad quadratum OX, sed est rectangulum AOB æquale quadrato SO, ergo & quadratum ON quadrato OX æquale erit, quare puncta N, & X idem sunt, sed est N in sectione, quare recta TX conuenit cum sectione in X, vel N, hoc est RN & RX æquales erunt, sed est RX æqualis ipsi DT, & DT minor M, vnde RN, vel RX erit quoque minor M. Peruenit ergo asymptotos CD cum sectione ad interuallum RN minus dato interuallo M. Quod tandem erat demonstrandum.

COROLL. I.

HInc est, quodlibet diametri segmentum inter quamcunque applicatam, & rectam ex ipsius occursu cum sectione alteri asymptoton æquidistanter ductam, medium esse proportionale inter aggregatum ex transuerso latere cum prædicto diametri segmento, idemque segmentum. Demonstratum est enim HP esse mediam proportionalem inter AH, & HB; & OS mediam inter AO, & OB.

COROLL. II.

PAtet etiam quamcunque rectam, ex puncto transuersi lateris inter centrum, & verticem sumpto alteri asymptoton æquidistanter ductam necessariò sectioni occurrere. Iam enim supra ostendimus rectam STX, quæ ex puncto S in transuerso CB ducta est asymptoton CD parallela, cum sectione conuenire in N.

MONITVM.

HInc facilè erit ostendere 13. secundi conicorum aliter, & affirmatiuè, vt videre licet in sequenti.

THEOR. IV. PROP. XI.

Si in loco asymptotis, & sectione terminato quædam recta linea ducatur alteri asymptoton æquidistans, in vno tantùm puncto cum sectione conueniet, eamque necessariò secabit. Prop. 13. sec.conic.

SIt in præcedenti schemate in loco ab asymptotis, & sectione terminato quodcunque punctum S, à quo ducta sit STX asymptoton CD æquidistans.

ſtans. Dico ipſam cum ſectione conuenire, eamque omnino ſecare.

Iungatur CS, quæ producta ſectioni occurret, per ſecundam partem 8. huius, eritque ſectionis diameter: quare per Coroll. 2. præcedentis, ipſa STX ſectioni occurret, vt in X.

Præterea, cum quæcunque contingenti æquidiſtans GI ſupra RX, inter aſymptoton, & ſectionem intercepta, maior ſit ipſa RX, ſiue ipſa GZ, punctum Z cadet extra ſectionem, & ſic de quolibet alio puncto rectæ XTS. E contra cum quælibet intercepta LY infra RX, parallela ad DB, minor ſit ipſa RX, ſiue LF, punctum F cadet intra ſectionem, idemque de quolibet alio puncto rectæ XF: vnde recta STX ab ipſo occurſu X cum ſectione, ad partes verticis tota cadit extra, ad oppoſitas verò partes tota cadit intra ſectionem; ideoque in vno tantum puncto X Hyperbolen ſecat. Quod erat propoſitum.

COROLL.

Hinc eſt, lineam alteri aſymptoton æquidiſtantem per punctum, quod ſit, vel in ipſa ſectione, vel intra, pariter in vno tantùm puncto ſectioni occurrere, eamque ſecare.

Nam recta XS ex puncto X, quod eſt in Hyperbola, vel recta FS ex puncto F, quod eſt intra, æquidiſtanter ducta aſymptoto CD, ſi ad partes centri C producatur, alteri aſymptoto CE omnino occurrit, (quoniam EC, ſecans DC vnam parallelarum ſecat quoque alteram CE) vnde aliqua pars, ipſius rectæ XS, vel FS cadit in loco ab aſymptotis, & ſectione terminato, ac ideo ex his, quæ ſuperius oſtendimus, ipſa linea in vno tantùm puncto ſectioni occurret, ac Hyperbolen ſecabit.

Quapropter, quælibet linea alteri aſymptoton æquidiſtans, dummodo ſit ducta ex puncto, quod ſit in angulo ab aſymptotis facto, in vno tantùm puncto Hyperbolæ occurrit, atque eam ſecat.

MONITVM.



X hucusque demonstratis liceat animaduertere quamcumque asymptoton quodam-modo esse primam ex centro ducibilium, sed Hyperbolæ non occurrentium; itemque esse primam sibi ipsi æquidistantium, sed Hyperbolen non secantium.

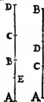
QVæcunque enim educta ex C diuidens angulum DCE secat Hyperbolen, quæcunque verò ex C ducta extra CD, Hyperbolæ quidem non occurrit, cum neque ipsa CD interior, cum sectione conueniat. Quare angulus DCE dici poterit MINIMVS ex centro C Hyperbolen comprehendentium, rectis lineis nunquam ei occurrentibus.

Item quælibet SX asymptoto CD æquidistanter ducta intra angulū DCE, Hyperbolen secat, quælibet verò extra angulum ducta eidem CD parallela, nunquam conuenit cum CD, & eò minus cum sectione: ex quo asymptotos Hyperbolæ appellari quodammodo posset vltima tangentium Hyperbolen, ad infinitum tamen interuallum. Nam, quæcumque contingens Hyperbolen ad finitam distantiam, secat semper diametrum CB infra C, & quò punctum contactus remotius fuerit à vertice eò magis occursus contingētis cum diametro, centro C fiet propior; donec, cum punctum contactus per infinitum interuallum abierit à centro, prædictus occursus cum ipso centro conueniat.

Sed ne suscipiendam materiam interpellare nobis sit opus, cum in ipsius progressu Parabolæ quadratura indigeamus, inter alias, quas habemus, apponemus hìc tantùm eam, quæ, licet expeditior non sit, nonnulla tamen Lemmata, ac Theoremata præmittit, quorum prima ad aliquas de MAXIMIS, & MINIMIS propositiones omnino sunt necessaria.

LEMMA III. PROP. XII.

Si fuerit vt recta AD ad DC, ita quadratum AB ad BC. Dico tres AD, DB, DC esse in continua eademque ratione geometrica.



NAm sumpta BE tertia proportionali post AB, BC; cum sit in prima figura, AB ad BC, vt BC ad BE, erit componendo AB cum BC ad BC, vt BC cum BE ad BE, & permutando, AB cum BC, siue AC, ad BC cum BE, siue ad CE, vt BC ad BE, vel vt AB ad BC, ex constructione: quod memento.

Et cum sit, ex suppositione, linea AD ad DC vt quadratum AB ad BC, & quadratum AB ad BC, vt linea AB ad BE, ex constructione, erit AD ad DC, vt AB ad BE, & per conuersionem rationis, & permutando, & iterum per conuersionem rationis AD ad DB, vt AC ad CE,

I. II. vel vt AB ad BC, vt superius ostendimus: & permutando, & per conuersionem rationis, AD ad DB vt DB ad DC. Quod in prima figura ostendendum erat.

In secunda verò: cum sit AB ad BC, vt BC ad BE, erit diuidendo, & permutando, AC ad CE vt BC ad BE, vel vt AB ad BC, ex constructione: quod serua.

Et cum sit AD ad DC vt quadratũ AB ad BC, & quadratum AB ad BC vt linea AB ad BE, ex constructione, erit AD ad DC vt AB ad BE, & per conuersionem rationis, permutando, conuertendo, diuidendo, & iterum conuertendo AD ad DB, vt AC ad CE, vel vt AB ad BC, vt modò ostensum fuit, & permutando, conuertendo, per conuersionem rationis,& diuidendo AD ad DB vt BD ad DC. Quod erat in secunda demonstrandum.

ALITER idem breuiùs.

Iisdem positis: dico iterùm vt in præcedenti.

DEscribatur super AD semicirculus AED, & per C erigatur CE diametro AD perpendicularis, iunganturque DE, AE, & BE, quæ producta in secuuda figura, occurrat cum AF ipsi CE parallela in puncto F.

Iam in vtraque figura, cum sit per hypotesim quadratum AB ad BC, vt recta AD ad DC, vel vt quadratum AD ad DE, vel vt quadratum AE ad EC, ob triangulorum similitudinẽ, erit recta AB ad BC, vt recta AE ad EC: quare in prima figura erit angulus AEB, æqualis angulo BEC, sed angulus BAE æquatur angulo DEC, quare duo simul AEB, BAE, siue vnicus DBE, æqualis erit duobus simul BEC, DEC, siue vnico DEB, ergo BD est æqualis ipsi DE. In secunda verò, cum sit AB ad BC, vel FA ad EC, vt AE ad EC erunt AF, AE interse æquales, vnde angulus AEF, æqualis angulo AFE siue parallelarum externo CEB, sed est AEF æqualis duobus simul ABE, EAB, quare & CEB iisdem angulis ABE, EAB æqualis erit, estque pars CED æqualis vnico angulo EAD, ergo reliquus angulus DEB reliquo DBE æqualis erit, hoc est recta DB æqualis DE. Itaque in vtraque figura cum DB sit æqualis DE, sitque DE media proportionalis inter AD, DC, erit quoq; DB media inter easdem AD, DC. Quod erat demonstrandum.

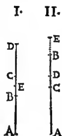
ITE-

ITERVM aliter breuiùs, ſed negatiuè.

Si fuerit vt recta AD ad DC, ita quadratum AB ad BC, erunt AD, DB, DC in continua ratione geometrica.

SI enim DB non eſt media proportionalis inter AD, DC, eſto ſi fieri poteſt media quæcunque DE; erit igitur, in prima figura, tota AD ad totam DE, vt pars DE ad partem DC, ergo reliqua AE ad reliquam EC, erit vt pars ED ad DC, vel vt tota AD ad totam DE: (ex cõſtructione) in ſecunda verò cum ſit AD ad DE vt DE ad DC, erit componendo AE ad ED, vt EC ad CD, & permutando AE ad EC, vt ED ad DC, vel vt AD ad DE (ex conſtructione) cum ergo in vtraque figura ſit AE ad EC, vt AD ad DE, erit quadratum AE ad EC, vt quadratum AD ad DE, vel vt recta AD ad DC, vel vt quadratum AB ad BC (ex ſuppoſitione) vel recta AE ad EC, vt recta AB ad BC, & in prima figura componendo, at in ſecunda diuidendo, AC ad CE, vt AC ad CB, quare CE, CB inter ſe ſunt æquales, totum, & pars, quod eſt abſurdum: non eſt ergo media inter AD, & DC, quæ ſit maior, vel minor DB; vnde ipſa DB erit media proportionalis inter AD, & DC. Quod demonſtrare oportebat.

Vniuerſalius quàm à Caual. in 3. prop. exerc. 6.



COROLL.

HInc patet, quod, cum fuerint tres magnitudines continuè proportionales, tùm exceſſus quibus differunt, tùm earum aggregata, erunt in eadem ratione, in qua ſunt datæ magnitudines: quando enim poſitum fuit eſſe AD ad DE, vt DE ad DC oſtenſum quoque fuit AE ad EC eſſe vt AD ad DE, ſed in prima figura AE, EC ſunt exceſſus datarum magnitudinum, in ſecunda vero ſunt aggregata primæ cum ſecunda, & ſecundæ cum tertia; quare patet, &c.

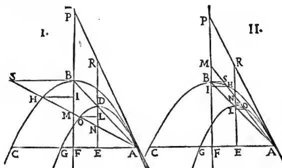
THEOR. V. PROP. XIII.

Si duæ Parabolæ ad eaſdem partes deſcriptæ ad idem punctum ſimul occurrant, ſintque earum diametri inter ſe æquidiſtantes, & applicatæ ſint eædem, ac ipſarum vertices ſint in eadem recta, quæ ducitur ex occurſu; ipſæ in nullo alio puncto ſimul conuenient, & omnes, quæ ex contactu in ipſis ducuntur in eadem ratione à ſectionibus diuidentur.

ESto Parabole ABC, cuius diameter BF, & ducta BA, ſit quælibet DE ipſi BF æquidiſtans, & AC ordinatim applicata BF, & per verticem D,

diametro DE deſcribatur Parabole ADG, cuius AE ſit eius ſemi-applicata: dico primum Parabolen ADG, etiam ſi in infinitum producatur, totam cadere intra ABC, & ſi ex A ducatur quæcunque ANMH, ipſam à Parabola ADG ſecari in O, in eadem ratione, ac AC ſecatur in G, & AB in D.

Ducta enim ex A recta AP contingente Parabolen ABC, erit FB æqualis BP; ideoque ED æqualis DR, vnde AR continget Parabolen ADG, & AH ſecabit ipſam in O.



Iam ductis ex H, O, ſemi-applicatis HI, OL, erit, ob Parabolen, FB ad BI, vt quadratum AF ad HI, vel vt quadratum FM ad quadratum MI; quare per Lemma præcedens, erit FB ad BM, vt BM ad BI, & per Coroll. eiuſdem, in vtraque figura, erit FM ad MI, vt FB ad BM; eadem penitus ratione oſtendetur eſſe EN ad NL, vt ED ad DN, ſed eſt FB ad BM, vt ED ad DN, quare & FM ad MI erit vt EN ad NL, ſed FM ad MI, eſt vt AM ad MH, & EN ad NL, vt AN ad NO, quare AM ad MH erit vt AN ad NO, & in prima figura conuertendo, componendo, & permutando, HA ad AO, vt MA ad AN; in ſecunda verò per conuerſionem rationis, conuertendo, & permutando HA ad AO erit vt MA ad AN. Eſt igitur in vtraque figura HA ad AO, vt MA ad AN, vel vt BA ad AD, ſed eſt BA maior AD ex conſtructione, quare & HA erit maior AO, ſed HA tota eſt intra Parabolen ABC, vnde punctum O, quod eſt in Parabola ADG erit intra Parabolen ABC, & ſic de quocunque alio puncto Parabolæ ADG, etiam ſi ducta AH cadat infra AC; quare ipſa cadit tota intra ABC: & cum ſit HA ad AO, vt BA ad AD, vel vt FA ad AE, vel ſumptis duplis, vt CA ad AG, erit diuidendo HO ad OA, vt CG ad GA. Quod erat, &c.



COROLL. I.

Hinc patet, quod si recta linea in Parabola vtcunque applicata ex vtraque parte sectioni occurrens cum diametro, vel intra, vel extra conueniat, atque ex ipsius terminis cum sectione, ad diametrum ducantur ordinatæ, erunt ab his abscissa diametri segmenta ex vertice sumpta, extremæ, & abscissum ab applicata, erit media trium continuè proportionalium. Demonstratum est enim in figuris Theorematis quando AH diametrum secat in M, & sectionem in A, H, quod ordinatim applicatis AF, HI, est FB ad BM, vt BM ad BI.

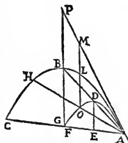
Vniuersalius quàm in 4. prop. exerc. 6. Caual.

COROLL. II.

Ex quo etiam elicitur, quod si in Parabola ABC ducta AH diametrum secans in M producatur vsque ad occursum cum contingente ex vertice B in S, semper rectangulum sub segmentis AS, & SH, inter sectionem, & contingentem interceptis æquatur quadrato segmenti SM inter contingẽtem, ac diametrum intercepti. Nam cum sit vt FB ad BM, ita BM ad BI erit quoque ob parallelas, AS ad SM, vt SM ad SH, quare rectangulum ASH æquabitur quadrato SM.

COROLL. III.

Hinc etiam est, quod, si ijsdem positis, interior Parabole ADG habuerit verticẽ in D puncto medio rectæ AB, ipsa quoque transibit per F medium punctum basis AC, & quæcunque educta ex contactu A, qualis est AH, bifariam secabitur in O ab interna sectione; quare si ex O ducatur OLM diametro BF æquidistans, ipsa erit diameter portionis ALH, & AH vna applicatarum, AO verò semi-applicata. Cumque sit AP contingens ABC in A, erit OL in trilineo mixto ADFB, æqualis LM in trilineo mixto ALBP, & sic de omnibus vbicunque interceptis in ijsdem trilineis.



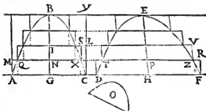
THEOR. VI. PROP. XIV.

Parabolæ æqualium altitudinum inter se sunt vt bases.

Sint duæ Parabolæ ABC, DEF æqualium altitudinum, hoc est concipiantur dispositæ inter easdem parallelas BE, AF: dico esse vt basis AC vnius, ad basim DF alterius, ita Parabole ABC ad Parabolen DEF.

Nam

Nam si hæ Parabolæ non fuerint basibus proportionales, erit altera Parabolarum minor quàm opus est ad hoc vt huiusmodi magnitudines sint proportionales. Esto igitur si possibile est minor ABC, & eius defectus sit O; ita vt basis AC ad DF sit vt aggregatum Parabolæ ABC cum magnitudine O ad Parabolen DEF. Iam iuxta vulgatam methodum Antiquorum circumscribatur Parabolæ ABC, figura ex parallelogrammis constans, æqualium altitudinum, ita vt eius excessus supra Parabolen sit minor O; quod fiet, nempè si ex circũscripto Parabolæ parallelogrammo AY; per bisectionem diametri BG in I, auferatur dimidium parallelogrammũ AL, & ex reliquo dimidium, donec supersit parallelogrammum CM,



quod minus sit spacio O: sic enim excessus circumscriptæ figuræ ex parallelogrammis, supra inscriptam ex æque altis parallelogrammis erit maximum parallelogrammum CM, (vt satis patet) quod est minus spacio O, ac ideo excessus circumscriptæ supra ipsam Parabolen erit adhuc minor O; quapropter addita communi Parabola ABC, erit vniuersa figura circumscripta minor aggregato Parabolæ ABC cum spacio O: itaque circumscripta ABC ex parallelogrammis ad Parabolen DEF minorem habebit rationem, quam huiusmodi aggregatum ad eandem Parabolen DEF, sed prædictũ aggregatum ad DEF Parabolen ponitur esse vt basis AC ad DF, vel vt circumscripta ABC ad circumscriptam DEF, quæ per æquidistantium basibus interfectionem descripta, ex æquè altis, & numero æqualibus, ac proportionalibus parallelogrãmis constabit (cum sit quadratum AC ad QX, vt recta GB ad BN, vel vt HE ad EP, vel vt quadratũ DF ad quadratum TZ; vnde & recta AC ad QX, vel parallelogrammum CM ad QS, vt recta DF ad TZ, vel vt parallelogrammum DR ad TV, & sic de reliquis singula singulis, vnde vniuersa circumscripta ABC, ad vniuersam DEF, est vt vnum CM ad vnum DR, vel vt basis AC ad basim DF) quare circumscripta ABC ad Parabolen DEF minorem habebit rationem, quam eadem circumscripta ad circumscriptam DEF, hoc est circumscripta ex parallelogrammis erit minor ei inscripta Parabola DEF, totum parte; quod est absurdum: inter has ergo Parabolas non datur minor quàm sit opus ad hoc vt ipsæ sint basibus proportionales: erit ergo Parabole ABC ad DEF, vt basis AC ad DF basim. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

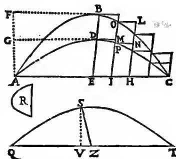
QVod ostensum est de integris Parabolis æquè altis, idem penitus consimili constructione, eademque ratiocinatione demonstrabitur de duobus trilineis ABG, CBG ab eadem diametro BG abscissis; item de duobus trilineis Parabolicis ABG, DEH æqualium altitudinum, à curuis

curuis AB, DE; diametris BG, EH; & ſemi-applicatis AG, DH comprehenſis, nempe trilineum ABG ad CBG, eſſe vt baſis AG ad GC, ſibi æqualem; ac propterea diametrum BG Parabolen ABC bifariam ſecare; & vnũquodque trilineorum eſſe ſemi-Parabolen; & ſemi-Parabolen ABG ad ſemi-Parabolen DEH æqualis altitudinis, eſſe vt baſis AG ad baſim DH, & integram ABC ad dimidiam DEH eſſe vt baſis AC ad ſemi-baſim DH.

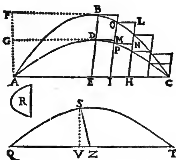
THEOR. VII. PROP. XV.

Parabolæ æqualium baſium ſunt inter ſe vt altitudines.

SInt primò duæ Parabolæ ABC, ABC ſuper eandem baſim AC, & circa eandem diametrum BE. Dico has eſſe inter ſe vt earum altitudines FA, GA; & quod de ſemi-Parabolis EBC, EDC demonſtrabitur, idem inſequetur de duplis.



Si enim non eſt vt FA ad AG, ita ſemi-Parabole EBC ad EDC, erit altera ipſarum minor quàm ſit opus ad hoc vt ſint proportionales altitudinibus FA, AG, ſitque, ſi poſſibile eſt, minor EBC defectu R, & bifariam ſecta EC in H, & iterum EH bifariam in I, &c. circumſcribatur, vt in præcedenti, trilineo ſemi-Parabolæ ECB figura BLCE ex parallelogrammis æque altis conſtans, cuius exceſſus ſupra ſemi-Parabolen ſit minor R, ita vt ipſa circumſcripta figura BLCE ad ſemi-Parabolen EDC adhùc minorem habeat rationem quàm altitudo FA ad AG; quo facto, ſemi-Parabolæ quoque EDC per æquidiſtantium diametro interſectionem altera circumſcribatur figura DMNCE ex totidem Parallelogrammis æque altis, &c. Et cum ſit ob Parabolas, recta BE ad OI, vt rectangulum AEC ad AIC, vel vt DE ad PI, erit permutando BE ad ED, vel parallelogrammum BI ad DI, vt OI ad IP, vel vt parallelogrammum OH, ad PH, & ſic de reliquis circumſcriptæ BLCE, ad reliqua circumſcriptæ DMCE, ſingula ſingulis, quare vniuerſa circumſcripta ALCE ad vniuerſam DMCE, erit vt vnum parallelogrammum BI ad vnum DI, vel vt baſis BE ad ED, vel vt FA ad AG, ſed FA ad AG habet maiorem rationem quàm circumſcripta ALCE ad ſemi-Parabolen EDC; quare circumſcripta ALCE ad circumſcriptam DMCE, habebit maiorem rationem quàm ad ſemi-Parabolen EDC, vnde circumſcripta DMCE minor erit inſcripta ſemi-Parabola EDC; totum parte, quod eſt abſurdum. Non datur ergo inter has ſemi-Parabolas minor quàm ſit opus, ad hoc vt ipſæ ſint baſibus



ſibus proportionales:quare ſemi-Parabole EBC ad EDC, ſiue tota ABC ad totam ADC, ſuper eadem baſi AC, & circa eādem diametrum BE,eſt vt altitudo FA ad AG. At ſi concipiatur altera Parabole QST, cuius baſis QT æqualis ſit baſi AC, altitudo verò SV ſit æqualis ipſi GA (quæcunq; ſit inclinatio baſis cum diametro SZ) ipſa, per præcedētem propoſitionem,ęqualis erit Parabolę ADC, ac ideo QST ad ABC eandem habebit rationem, quàm ADC ad AEC, vel quàm altitudo GA, ſiue SV ad FA. Vnde Parabolæ æqualium baſium ſunt inter ſe vt altitudines. Quod erat, &c.

THEOR. VIII. PROP. XVI.

Si recta linea ſemi-Parabolen ad extremum baſis contingens cum diametro conueniat, & intra ipſam ſuper eadem baſi deſcripta ſit Parabole, cuius diameter ſit dimidium diametri ſemi-Parabolæ, ac ei æquidiſtet; erit trilineum à contingente, producta diametro, & conuexa ſemi-Parabolica linea contentum, æquale trilineo à diametro, conuexa Parabolica, & concaua ſemi-Parabolica comprehenſo.

ESto ſemi-Parabole ABC, cuius baſis AC, & contingens AE diametro CB occurrens in E, & iuncta AB, ac biſariam ſecta AC in F, agatur FGH æquidiſtans CB,& ſuper baſi AC cum diametro GF, quod eſt dimidium CB, deſcripta ſit Parabole AGC, (quæ cadet ª tota intra ABC:) Dico trilineum AEBHA æquale eſſe trilineo AHBCGA.

ª 13. h.

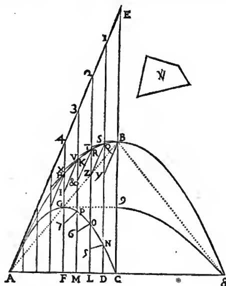
Sed ad hoc demonſtrandum, videndum eſt primò, quomodo cuilibet trilineo ex prædictis, circumſcribi poſſint figuræ ex æquè altis, & numero æqualibus parallelogrammis, &c.

Per continuam igitur biſectionem,diuidatur contingens AE,vel baſis AC in quotcunq; partes æquales CD, DL, LM, MF &c.: & per diuiſionum puncta D, L, M, F,&c. ducātur ipſi CBE æquidiſtantes D1, L2, M3, F4,&c. quæ ſemi-Parabolen ſecent in Q, R, K, H &c. Parabolen verò in N, O, P, G, &c.; & ex B, Q, R, K &c.: ducantur BY, QZ, R&, KI &c.: ipſi AE parallelæ, quæ intra ſemi-Parabolen ABC cadent (cum ſint contingenti æquidiſtantes) vel extra trilineum AEBHA. Hac ergo methodo circumſcribetur trilineo figura EBYZ&I &c. ex æquè altis parallelogrammis &c.

Iam

Iam si iungantur AN, AO, AP, &c. quæ secent LO, MP, FG, &c. in 5, 6, 7, &c. interceptæ N5, O6, P7, cadent totæ intra Parabolen AGC, hoc est extra trilineum AGCB; & si ex punctis B, Q, R, K, &c. ducantur contingentes BS, QT, RV, KX, &c. ipsæ æquidistabunt rectis CD, N5, O6, P7, &c. (cum ductæ AC, AN, AO, AP, &c. sint [a] ordinatim ductæ diametris BC, QN, RO, KP, &c.) sicque circumscribetur trilineo AHBCGA, figura ex æquealtis parallelogrammis BD, S5, T6, V7, &c. [a] 3. Coroll. 13. h.

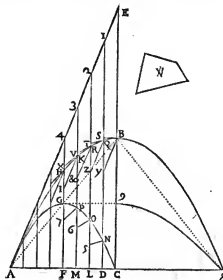
Ampliùs, si ipsæ ZQ, &R, IK, &c. producantur extra semi-Parabolen, cadent totæ intra trilineum AEBH, atque ita inscribetur ei figura ex paralle-



logrammis &c. Et si ex punctis Q, R, K, &c. ducantur contingentibus SB TQ, VR, &c. æquidistantes, cadent totæ intra trilineum AHBCG, cum sint ordinatim ductæ, & si ex punctis N, O, P, &c. ducantur ad partes diametri EBC rectæ æquidistantes ipsis AC, AN, AO, &c. (quæ erunt etiam parallelæ contingentibus ex B, Q, R, &c. vel prædictis applicatis ex Q, R, K &c.) cadent hæ quoq; intra trilineum AHBCG, nam quæ ex N ducitur ipsi AC æquidistans ad partes diametri CB cadit extra Parabolen AGNC, cum sit AD maior DC, & quæ ex O æquidistat ipsi AN cadit extra AGC, cum sit AS maior 5N, & sic de reliquis. Itaq; hac operatione inscribetur trilineo AHBCG figura ex parallelogrãmis æquealtis, &c. Quare ex his, & ex 14. huius

patet quomodo cuilibet horum trilineorum circumſcribi poſſit figura ex æque-altis parallelogrammis, &c. quæ ſuperet proprium trilineum magnitudine, quæ minor ſit quacunque magnitudine propoſita.

Iam dico huiuſmodi trilinea inter ſe eſſe æqualia. Nam ſi ſint inæqualia, alterum ipſorum, vt puta AHBCGA altero AHBE minus erit, & defectus ſit ſpacium ♈; quo poſito circumſcribatur, vti nuper docuimus, trilineo AHBCGA figura ex parallelogrammis SC, TN, VO, HP, &c. cuius exceſſus ſupra trilineum ſit minor magnitudine ♈: quapropter talis figura adhuc minor erit trilineo AEBHA, cui circumſcribatur, item per eaſdem lineas ipſi CB æquidiſtantes, figura ex totidem parallelogrammis EY, 1Z, 2&, 3I, &c. Patet nũc talem circumſcriptam, alteri circumſcriptæ ABD567, &c. ęqualem eſſe, cum vtraq; ipſarum ex æqualibus numero, & magnitudine parallelogrammis cõſtet vtrunq; vtrique: (parallelogramma enim EY, BD, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper æqualibus baſibus EB, BE; & parallelogrammum IZ æquatur parallelogrãmo Q5, cum inter eaſdem ſint parallelas, & ſuper æqualibus



a 3. Coroll. 13. h. baſibus a IQ, QN, & ſic de ſingulis) ſed circumſcripta ABD567, &c. eſt minor trilineo AEBHA, vt modò oſtendimus, ergo & circumſcripta AEBYZ&I, &c. minor erit eodem trilineo AEBHA; totum parte, quod eſt abſurdũ. Quare huiuſmodi trilinea inter ſe ſunt æqualia. Quod oſtendere propoſitum fuit.

THEO-

THEOR. IX. PROP. XVII.

Parabole ſeſquitertia eſt trianguli eandem ipſi baſim, & eandem altitudinem habentis.

REpetito præcedenti diagrammate, dico Parabolen AB8 ſeſquitertiam eſſe inſcripti trianguli AB8.

Nam ducta G9 parallela ad AC deſcribatur ſemi Parabole 9, 8, cuius diameter ſit 9C, & ſemi-applicata ſit C8, æqualis baſi AC Parabolæ AGC. Et cum ſit ſemi-Parabole ABC æqualis [a] ſemi-Parabolæ CB8, & Parabole AGC æqualis [b] ſemi-Parabolæ C9 8, ſitque C98 dimidium [c] CB8 (nam eſt C9 dimidium CB &c.) erit Parabole AGC dimidium ſemi-Parabolæ ABC, ſiue æqualis trilineo AHBCGA, ac etiam trilineo [d] AEBH; quare totum triangulum AEC ſeſqui alterum erit ſemi-Parabolæ ABC, ſiue erit vt 6 ad 4, ſed ad triangulum ABC eſt vt 6 ad 3, cum ſit EC dupla CB, vnde ſemi-Parabole ABC ad triangulum ABC, hoc eſt dupla ad duplum, nempe Parabole AB8 ad inſcriptum triangulum AB8, erit vt 4 ad 3. Quod demonſtrare oportebat.

[a] Coroll. prop. 14. h.
[b] Coroll. prop. 14. h.
[c] 15. h.
[d] 16. h.

MONITVM.



VT hoc loco, ex aduerſo indirectæ Antiquorum viæ per duplicem poſitionem, luce clariùs pateat quantùm facilitatis, breuitatis, atque euidentiæ naſciſcatur è noua, directaque methodo (rectè tamen cautèque vſurpata) acutiſsimi Geometræ Caualerij, per indiuiſibilium doctrinam, nobis amiciſsimam, ex hac alteram accipe eiuſdem theorematis demonſtrationem, conſimili arte confectam, ac in præcedenti.

THEOR. X. PROP. XVIII.

Parabole ſeſquitertia eſt trianguli eandem ipſi baſim, & eandem altitudinem habentis.

SIt Parabole ABC, cuius diameter BD, baſis AC: dico ipſam ſeſquitertiam eſſe inſcripti trianguli ABC.

Biſariam enim ſecta AD in G, per quod ducta GF parallela ad DB, & per F, FH parallela ad AD, ac deſcriptis, vt in præcedenti figura Parabola AED, & portione Parabolæ HCD, cuius diameter ſit HD, & ſemi-applicata ſit DC ducatur in tota ABC quælibet applicata NL diametrum ſecans in M, eritque NM æqualis ML, & ſic de quibuslibet alijs applicatis ipſi AC æquidiſtantibus, quare omnes ſimul in portione ABD, omnibus ſimul in portione DBC æquales erunt, ſiue portio ABD æqualis DBC, nempè vtraque erit ſemi-Parabole, & eadem ratione oſtendetur DHC ſemi-Parabolen eſſe.

Iam applicata quacunque OPQR, tùm in Parabola AED, tùm in semi-Parabola DHC; cum sit quadratum AD ad OP vt linea GF ad FS, vel vt DH ad HQ, vel vt quadratum DC ad QR, sintque antecedentia AD, DC æqualia, erunt & consequentia OP, QR æqualia, nempè applicata OP æqualis applicatæ QR, & ita de omnibus &c. quare integra Parabole AED æquatur semi-Parabolæ DHC.

Amplius ducta quacunque TVX parallela ad BD, erit BD ad TX, vt rectangulum ADC ad AXC, vel vt HD ad VX, & permutando, cum sit BD dupla DH, & TX erit dupla XV, & sic de omnibus interceptis, & æquidistantibus in semi-Parabola DBC, & in semi-Parabola DHC, vnde tota semi-Parabole DBC dupla est totius semi-Parabolæ DHC, & sumptis æqualibus; semi-Parabole ABD dupla Parabolæ AFD, siue trilineum ANBDFA, æquale erit Parabolæ AFD.

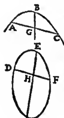
Tandè, si sit AE contingens ABC in A, erit EB æqualis BD, & ducta in trilineo AEBDFA quacunque IKZ parallela ad ED, erit IK æqualis a KZ, & sic de omnibus alijs interceptis in trilineis AEBNA, & ANBDFA quare totum trilineum AEBNA æquabitur toto trilineo ANBDFA, sed hoc, modò ostensum fuit æquale Parabolæ AFD, quapropter totum triangulum AED erit sesquialterum semi-Parabolæ ABD, vel erit vt 6 ad 4, sed ad triangulum ABD est vt 6 ad 3; quare semi-Parabole ABD ad inscriptum triangulum ABD erit vt 4 ad 3, & duplum ad duplum, hoc est Parabole ABC ad triangulum ABC, super eadem basi AC, & eiusdem altitudinis cum Parabola, erit vt 4, ad 3, nempe sesquitertium. Quod erat demonstrandum.

a 3. Coroll. 13. h.

Sed iam tempus est vt susceptum opus aggrediamur, initio facto à definitionibus.

Definitiones Secundæ.

I.



CONI SECTIONES ÆQVALITER INCLINATÆ vocentur illę, quarum ordinatim ductæ æquales inuicem angulos cum earum diametris efficiunt.

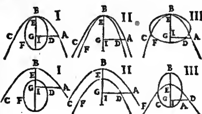
Videlicet coni-sectio ABC vocabitur æqualiter inclinata, vel eiusdem inclinationis, ac sectio conica DEF, cum vtriusque ordinatim ductæ AGC, DHF, earum diametros BG, EH, ad æquales diuidunt angulos, hoc est cum angulus AGB, angulo DHE, & qui ei deinceps CGB reliquo FHE æqualis fuerit.

II.

Coni-sectio vel circulus, coni-sectioni, vel circulo simul

mul adſcribi intelligatur, vel SECTIONES SIMVL ADSCRIPTÆ dicantur, quando cum fuerint æqualiter inclinatæ earum diametri, & ordinatim ductæ inter ſe mutuò congruant.

Nempe cum duę coni-ſectiones ABC, DEF æqualiter inclinatæ, ita diſpoſitę fuerint vt ipſarum diametri BG, EI ſibi mutuò congruant, & omnes vnius applicatę (quarum vna AG) congruant omnibus alterius applicatis, (quarum vna ſit DI,) ipſæ vocentur ſectiones ſimul adſcriptæ.



III.

Coni-ſectio, vel circulus, coni-ſectioni, vel circulo inſcribi dicatur, vel SECTIO SECTIONI INSCRIPTA vocetur, quando cum fuerit altera alteri adſcripta, ſit quoque tota intra eandem, nec alicubi ſe mutuò ſecent, licet in infinitum producantur, quæ in infinitum extendi poſſunt.

Hoc eſt, ſi vt in prima, & ſecunda figura vtriuſque ordinis præcedentis ſchematis duæ coni-ſectiones ABC, DEF fuerint ſimul adſcriptæ, & altera ipſarum vt DEF tota cadat intra aliam ABC, tunc dicatur ſectio DEF inſcripta ſectioni ABC.

IV.

Coni-ſectio, vel circulus, coni-ſectioni, vel circulo circumſcribi intelligatur, vel SECTIO SECTIONI CIRCVMSCRIPTA dicatur, ſi cum fuerit altera alteri adſcripta, tota quoque cadat extra eandem, nec alicubi ſe mutuò ſecent quamuis in infinitum abeant.

Qualis eſt in prædictis figuris ſectio ABC, quæ cum ſit adſcripta ſectioni DEF tota cadit extra eandem DEF.

V.

Coni-ſectio, vel circulus coni-ſectioni, vel circulo per verticem, vel per punctum intra, aut extra ſectionem datum adſcribi, vel inſcribi, aut circumſcribi intelligatur, ſiue SECTIO SECTIONI PER VERTICEM, vel PER DATVM PVNCTVM INTRA, aut EXTRA SECTIONEM ADSCRIPTA, vel INSCRIPTA, aut CIRCVMSCRIPTA dicatur, quando cum fuerit altera alteri adſcripta, vel inſcripta, aut circumſcripta, vnius diameter per datum punctum educta ſit quoque diameter alterius; vt videre eſt in præcedentibus figuris.

VI.

HYPERBOLÆ, & ELLIPSES, SIMILES inter ſe dicantur, quando cum fuerint ęqualiter inclinatę ipſarum latera ſint proportionalia, hoc eſt vt tranſuerſum vnius ad rectum, ita ſit tranſuerſum ad rectum alterius eiuſdem nominis.

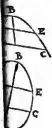
VII.

CONGRVENTES CONI-SECTIONES dicantur illæ, quæ cum fuerint

Ad extremum Marginem Pag: 38. libri 8.ui

r se mutuò

MENTVM
ſectionis,



nclinatæ
uentes,
e, hoc
utuò ſe-

C, DBE
rum cõ-
tes, vel

atæ æ-
ur BH,
e regu-

ingen-
Si pri-
& eiuſ-

atur ſe-
DBE in
rimis ſi-
quales,
ſectione
, quare
BC con-
plicata-
rum

rum ex eodem diametri puncto F: idemque ostendetur de omnibus alijs extremis punctis communium applicatarum ad vtrasque diametri partes: quare huiusmodi sectiones erunt in totum congruentes: eruntque eiusdem nominis; quoniam cum regula Parabolæ æquidistet diametro; Hyperbolæ autem conueniat cum diametro extra sectionem; Ellipsis verò eidem diametro intra sectionem occurrat, hoc est ad extremum transuersi lateris, cumque harum sectionum diametri simul congruant (nam sectiones sunt simul adscriptæ) si diuersi nominis essent ipsarum regulæ nunquam congruerent, quod est contra hypotesim. Sunt ergo tales sectiones congruentes simul, & eiusdem nominis. Quod primò, &c.

Si verò regulæ GOI, HPL infra contingentem BGH nunquam conueniūt, disiunctim simul procedentes, vt in 26. proximè subsequentibus figuris apparet, in quarum primis quatuor, regulæ sunt parallelæ, in reliquis autem à contingente BGH ad partes sectionum sunt semper inter se recedentes, estq; regula GOI propinquior diametro quàm HPL; facta eadem constructione, vt supra; quoniam latitudo FO minor est latitudine FP, & altitudo BF est eadem, erit rectangulum BFO [a] siue quadratum applicatæ NF in sectione DBE, maius rectangulo BFP [b] siue quadrato applicatæ MF in sectione ABC, hoc est applicata NF erit minor ipsa MF: quare punctum M sectionis ABC cadit extra sectionem DBE: idemque de omnibus alijs punctis sectionis ABC ad vtranque diametri partem. Vnde tota sectio ABC cadit extra sectionem DBE; ideoq; tales sectiones sunt in totum disiunctæ (eò quod semper disiunctim procedant ipsarum regulæ) & in communi tantùm vertice B se mutuò contingunt. Quod secundò, &c.

[a] Coroll. prop. 1. h. [b] Coroll. prop. 1. h.

Si tandem sectionum regulę GOI, HPL infra contingentem BGH ad partes sectionum se mutuò secant in P, vt videre est in 9. vltimis figuris; ducatur ex P communis sectionum applicata PFNM secans diametrum in F, sectionem ABC in M, & DBE in N. Iam cum in sectione ABC quadratum applicatæ MF æquale [c] sit rectangulo BFP, & quadratum applicatæ NF in sectione DBE æquale sit eidem rectangulo BFP, erunt quadrata MF, NF inter se æqualia, hoc est ipsæ applicatæ æquales; quare huiusmodi sectiones conueniunt simul in puncto M. Eadem omnino ratione ostendetur has sectiones ad alteram quoque diametri partem simul conuenire in extremo pūcto R reliquæ ad vnam sectionum applicatæ ex eodem diametri puncto F: ergo in duobus punctis M & R, præter in communi vertice B, simul conueniunt, in quibus patet has sectiones se mutuò secare; nam regulæ HL, GI conueniunt simul in vnico puncto P, in quo se mutuò secantes, hinc inde disiunctim procedunt, cadens PH segmentum regulæ LPH remotius à diametro BF, quàm PG segmentum regulæ GOI; ideoque & segmentum sectionis ABC supra applicatam MR totum cadet extra segmentum sectionis DBE supra eandem applicatam; è contra verò reliquum portionis ABC infra applicatam MR cadet totum intra reliquum portionis DBE infra eandem applicatam, cum segmentū PL propriæ regulæ HPL disiunctum sit, & propius diametro BF quàm segmentum PI propriæ regulæ GOI: omneque id ostenditur eadem penitus ratione, ac in secunda parte huius Theorematis demōstrauimus: quare huiusmodi coni-sectiones per vertices simul adscriptæ, & quarū regulæ se mutuò secant infra contingentem ex vertice, in ipsis vertici-

[c] Coroll. prop. 1. h.

bus

bus se contingunt; & in duobus tantùm punctis se mutuò secant. Quod tandem erat demonstrandum.

COROLL. I.

PAtet hinc, quod si regulæ coni-sectionum per vertices simul adscriptarum sibi ipsis congruant sectiones quoque erunt inter se congruentes, vt in primis quatuor figuris præcedentis schematis ostensum est; & si fuerint inter se congruentes, etiam ipsarum regulæ simul congruent: sed cum regulæ simul congruunt, congruunt quoque, & latera, & è conuerso, cum ad æquales angulos inter se disposita intelligantur, quare cum latera fuerint inter se congruentia siue æqualia, sectiones quoque inter se congruentes erunt; & si sectiones fuerint congruentes etiam ipsarum latera æqualia erunt.

Si verò regulę infra recta sectionum latera ex vertice contingenter applicata disiunctim procedentes nunquam simul conueniant, nec ipsæ sectiones vnquam conuenient, sed in vertice se mutuò contingent, & ea inscripta erit, siue minor, cuius regula infra prædictam contingentem diametro sectionum sit propior, seu cadat tota inter diametrum, & regulam alterius sectionis; quæ è contra circumscripta erit, siue maior, vt apparet in 26. figuris subsequentibus.

Si tandem ipsarum regulæ infra contingentes ex vertice se mutuò secent, sectiones quoque, sed in duobus tantùm punctis hinc inde à vertice (in quo se tangunt) se mutuò secabunt, in illis nempe, quæ sunt extrema eiusdem ordinatim applicatæ, ex regularum intersectione eductæ, super qua duæ coni-sectionum portiones inerunt, quarum ea erit inscripta, cuius regulæ segmentum inter prædictam applicatam, & contingentem interceptum, propinquius sit diametro sectionum, altera verò circumscripta, siue maior cuius regulæ segmentum à prædicta diametro magis distet, quod omne satis patet ex reliquis eiusdem schematis figuris.

COROLL. II.

PAtet quoque in Parabolis, & in alijs coni-sectionibus eiusdem nominis per vertices simul adscriptis, cum eodem transuerso latere, illam, quę minus habet rectum latus inscriptam, siue minorem esse ea cuius rectum latus maius est, & è contra. Nam in 5. 13. ac 14. figura, in quibus sectiones sunt eiusdem nominis, vti etiam in 15. & 16. (diximus enim circulum non incongruè haberi posse pro Ellipsi) demonstratum est sectionem DBE, cuius rectum BG minus est recto BH sectionis ABC, totam cadere intra ABC, vnde erit inscripta, siue minor, & è contra, sectionem ABC cuius rectum maius est totam cadere extra DBE, cuius rectum est minus: quapropter erit ei circumscripta, siue maior.

COROLL. III.

HInc quoque eruitur Hyperbolarum per vertices simul adscriptarum cum æqualibus rectis lateribus, illam, cuius transuersum latus maius

est,

est, inscriptam, vel minorem esse ea, cuius transuersum minus est; & è contra eam esse circumscriptam, siue maiorem, cuius transuersum minus est. Nam in 9. figura, in qua sectiones sunt Hyperbolæ simul adscriptæ cum eodem recto latere, ostensum fuit Hyperbolen DBE, cuius transuersum BI maius est, totam cadere intra Hyperbolen ABC, cuius transuersum BL minus est, & ideo DBE erit inscripta, siue minor; & è contra ipsa ABC, cuius transuersum est minus, erit circumscripta, siue maior.

COROLL. IV.

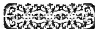
PAtet etiam in Ellipsibus tantùm, vel in Ellipsibus, & circulis per eundem verticē simul adscriptis cū eodem recto latere, eam esse inscriptam, siue minorem, cuius transuersum latus minus est, & è contra eam circumscriptam, vel maiorem esse, cuius transuersum maius est: quoniam in 10. 11. & 12. figura ostensum fuit Ellipsim, vel circulum DBE, cuius transuersum BI minus est, totam cadere intra Ellipsim, vel circulum ABC, cuius latus transuersum BL maius est; quare ipsa DBE erit inscripta, siue minor: & è contra Ellipsis, vel circulus ABC erit circumscriptus, siue maior, &c.

COROLL. V.

MAnifestum est etiam similes coni-sectiones per vertices simul adscriptas habere regulas parallelas, & eam sectionem esse inscriptam, vel minorem, cuius latera minora sunt; & è contra eam esse circumscriptam, vel maiorem, cuius latera sunt maiora. Si enim in *6. 7.* & 8. figura coni-sectiones ABC, DBE eiusdem nominis, ac per verticem B simul adscriptæ, fuerint similes, erit transuersum LB ad rectum BH vt transuersum IB ad rectum BG, & permutando, & diuidendo, LI ad IB, vt HG ad GB, vndæ regulæ LH, IG erunt parallelæ, sed in hoc Theoremate demonstratum est sectionē ABE minorum laterum, totam cadere intra sectionem ABC maiorum laterum, ergo ipsa DBE erit inscripta; & è contra demonstrauimus ABC maiorum laterum totam cadere extra DBE minorum laterum, ac propterea erit ei circumscripta.

COROLL. VI.

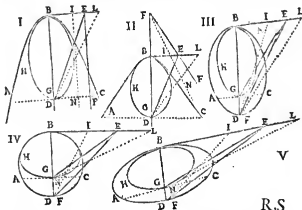
EX ipsa demum huius Theorematis demonstratione elicitur, quod in coni-sectionibus per vertices simul adscriptis, quadrata semi-applicatarum ex eodem diametri puncto inter se sunt vt earundem latitudines. Ostendimus enim in qualibet præcedentis schematis figura, quadratum semi-applicatæ MF, in sectione ABC, ad quadratum semi-applicatæ NF, in sectione DBE, esse vt latitudo propria FP, ad propriam latitudinem FO.



PROBL. VI. PROP. XX.

Datæ coni ſectioni, vel circulo, per eius verticem, cum dato tranſuerſo latere, quod in Ellipſi, vel circulo non excedat eius tranſuerſum, MAXIMAM Ellipſim inſcribere, & è contra.

DAtæ Ellipſi, vel circulo, per eius verticem *MINIMAM* coni-ſectionem circumſcribere cum dato, pro circumſcribenda Hyperbola, quocunq; tranſuerſo latere, pro Ellipſi verò, cum tranſuerſo dato, quod maius ſit tranſuerſo datæ Ellipſis, vel circuli.



Sit quælibet coni-ſectio, vel circulus ABC, cuius diameter BD, latus rectum BE, regula EF; oportet circa diametri ſegmentum BG per verticem B *MAXIMAM* Ellipſin inſcribere.

a 7. huius. Adſcribatur [a] ſectioni ABC per eius verticem, & circa diametrum BG cum recto BE Ellipſis GHB. Dico hanc eſſe *MAXIMAM* quæſitam.

Nam iuncta ipſius regula GE, cum hæc diſiunctim procedat à regula EF,
b 1. Coroll. prop. 19. huius. ſitque propior diametro, Ellipſis quoq; GHB [b] inſcripta erit ſectioni ABC, & erit *MAXIMA* inſcriptibilium: quoniam quæcunque Ellipſis cum eadem
c 2. Coroll. prop. 19 huius. tranſuerſa diametro BG adſcripta, & cum recto BI, quod minus ſit recto BE. minor eſt [c] Ellipſi GBH, quælibet verò Ellipſis eidem diametro BG adſcripta cum recto BI., quod maius ſit dato recto BE [d] maior eſt quidem Ellipſi
d 2. Coroll. prop. 19. huius. GHB, ſed omnino [e] ſecat ſectionem ABC, cum eius regula GL ſecet ſectionis regulam EL, infra contingentem BE. Vnde Ellipſis GHB eſt *MAXIMA*. Quod primò, &c.

Præ-

Præterea sit data Ellipsis, vel circulus GHB, cuius diameter BG, rectum BE, regula EG, & oporteat per verticem B, *MINIMAM* Parabolen in prima figura, vel cum dato quocunque transuerso BF, *MINIMAM* Hyperbolen in secunda figura, siue cum dato transuerso BF, quod in tertia, & quarta figura excedat transuersum BG datæ Ellipsis, vel circuli, *MINIMAM* Ellipsin circumscribere.

Adscribatur a Ellipsi GHB per verticem B in prima figura parabole ABC, & in secunda Hyperbole ABC, cum dato transuerso BF, & in tertia, & quarta Ellipsis ABC cum dato transuerso BF; & harum omnium sectionum rectum latus idem sit cum recto BE datæ Ellipsis. Iam patet ipsam sectionem ABC datæ GHB b circumscriptam esse. Insuper dico talem sectionem ABC esse *MINIMAM* quæsitam. a 5.6.7.h. b 2. Coroll. prop. 19. huius.

Nam, in prima figura, quælibet parabola, vel in reliquis, quæcunque eiusdem nominis sectio adscripta sectioni ABC per verticem B, cum eodem transuerso BF, sed cum recto BL, quod excedat rectum BE sectionis ABC eadem sectione c est maior, quælibet verò adscripta sectio cum recto BI, quod minus sit recto BE minor d est sectione ABC, sed Ellipsim GHB omninò e secat cum ipsarum regulæ IN, GE infra contingentem ex vertice se mutuò secent. Quare sectio Parabolæ, vel Hyperbole, aut Ellipsis ABC est *MINIMA* circumscriptibilium datæ Ellipsi, vel circulo GHB. Quod erat, &c. c 2. Coroll. prop. 19. huius. d 2. Coroll. prop. 19. huius. e 1. Coroll. prop. 19. huius.

COROLL. I.

Hinc solutio problematum. Videlicet: Datæ coni-sectioni circa maiorem axem, per eius verticem *MAXIMVM* circulum inscribere.

Item datæ Ellipsi circa minorem axem, per eius verticem *MIMIMVM* circulum circumscribere.

Si enim in tribus primis superioribus figuris concipiatur diametrum BD datæ Parabolæ, vel Hyperbolæ, aut Ellipsis ABC esse propriæ sectionis maiorem axem, eiusque segmentum BG æquari recto lateri BE, circa quod adscripta f sit Ellipsis GHB cũ recto BE: ipsa vt superius ostensũ fuit, erit *MAXIMA* inscriptibilium, eritque Ellipsis æqualium laterum circa axim, quàm in Monito post primam huius, animaduersum fuit circulum esse. Vnde datæ coni-sectioni circa maiorem axim inscriptus erit *MAXIMVS* circulus per verticem sectionis. Quod primò, &c. f 7. prop. huius.

Si verò, vt in quarta figura, datæ Ellipsi GHB circa minorem axim BG, & cuius rectum latus BE *MINIMVS* circulorum sit circumscribendus; sumpta BF æquali recto BE, ipsa excedet transuersum latus BG datæ Ellipsis GHB (nam semper in Ellipsi minor axis ad maiorem, est vt maior axis addatus rectum) itaque si circa BF Ellipsis adscribatur ABC, cum recto BE datæ Ellipsis, ipsa, per secundam partem propositionis huius, erit *MINIMA* datæ Ellipsi circumscriptibilium, sed talis Ellipsis ABC per Monitũ post 1. huius, cum sit æqualium laterum, & circa axim, idem est, ac circulus. Quare datæ Ellipsi circa minorem axem per eius verticem *MINIMVS* circulus circũscriptus erit. Quod secundò, &c.

COROLL. II.

PAtet etiam quomodo datæ coni-sectioni, vel circulo ABC per ipsius verticem inscribi possit Ellipsis, quę sit *MAXIMA* circa idem transuersum, & ipsius rectum latus ad versum in Parabola, vel Hyperbola datam quamcumque teneat rationem; & in Ellipsi, vel circulo data ratio non sit minor ratione recti BE, ad transuersum BD.

Nam si exempli gratia Parabolæ, vel Hyperbolæ primæ, ac secundæ figuræ inscribenda sit *MAXIMA* Ellipsis circa idem transuersum latus, & cuius rectum ad versum datam habeat rationem, R nempe ad S: fiat vt R ad S, ita rectum EB datæ sectionis ad BG, nam si cum eodem recto EB, ac transuerso BG adscribatur per B Ellipsis GHB, ipsa erit *MAXIMA* circa idem transuersum BG, per ea, quæ superius demonstrata fuerunt. Si verò data ratio R ad S non sit minor ratione recti EB ad transuersum BD; in tertia, quarta, & quinta figura, fiat vt R ad S, ita EB ad BG, quod erit transuersum quæsitæ inscriptæ Ellipsis, quæ erit *MAXIMA*, &c.

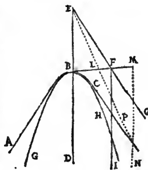
PROBL. VII. PROP. XXI.

Datæ Hyperbolæ, per eius verticem MAXIMAM Parabolen inscribere, & è contra.

Per verticem datæ Parabolæ, cum dato transuerso latere MINIMAM Hyperbolen circumscribere.

SIt data Hyperbole ABC, cuius vertex B, diameter BD, transuersum latus BE, rectum BF, & regula EFO oportet primùm per eius verticem B *MAXIMAM* Parabolen inscribere.

a 5. pr. 5. huius. Adscribatur a Hyperbolæ ABC, per verticem B, & cum recto BF Parabole GBH. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam.



Ducta enim ex F Parabolæ regula FI, cum hæc infra contingentem BF, regulę EFO, nunquam occurat, (cum simul conueniãt in F) sitque regula FI propinquior diametro BD quàm producta regula FO, erit Parabole b GBH datę Hyperbolę ABC inscripta, eritq; *MAXIMA*: quoniam quælibet alia Parabole ipsi ABC per verticem B adscripta cum recto BL, quod minus sit recto BF datę Hyperbolæ, c minor est Parabola GBH, quælibet verò adscripta cum recto BM, quod excedat rectum BF datę Hyperbolæ ipsa GBH

b 3. Coroll prop. 19. huius.

c 2. Coroll. prop. 19. huius.

est

eſt *a* quidem maior; ſed omnino ſecat *b* Hyperbolen ABC, quoniam eius regula MN infra contingentem BM ſecat regulam EFO. Vnde Parabole GHB erit *MAXIMA* inſcripta, &c. Quod primò, &c.

a ibidem. *b* 1. Coroll. prop. 19. huius.

Sit verò data Parabole GBH, cuius vertex B, diameter BD, rectum BF, & regula FI, & circumſcribenda ſit ei cum dato tranſuerſo BE *MINIMA* Hyperbole.

Adſcribatur *c* Parabolæ GBH, per verticem B, cum dato tranſuerſo BE Hyperbole ABC, cuius rectum latus idem ſit, ac rectum BF datæ Parabolæ. Dico huiuſmodi Hyperbolen eſſe *MINIMAM* quæſitam.

c 6. prop. 19. huius.

Nam quælibet alia Hyperbole per verticem B datæ Hyperbolæ ABC adſcripta, cum eodem tranſuerſo BE, ſed cum recto BM, quod maius ſit recto BF ipſa ABC *d* maior eſt; quælibet verò adſcripta cum recto BL, quod deficiat à recto BF, eadem ABC *e* eſt quidem minor, ſed omnino ſecat *f* Parabolen GBH cum eius regula ELP infra contingentem BF producta ſecet regulam FI datæ Parabolæ GBH. Quare huiuſmodi Hyperbole ABC erit *MINIMA* circumſcriptibilium datæ Parabolæ ABC per verticem B, & cum dato tranſuerſo BE. Quod erat ſecundò, &c.

d 2. Coroll. prop. 19. huius. *e* ibidem. *f* 1. corol. prop. 19. huius.

MONITVM.



Liquis forſan hoc loco vereri poſſet enunciationes, vel ſaltem argumentum MAXIMARVM, MINIMARVMQVE ſectionum inſcriptibilium, ac circumſcriptibilium habuiſſe me à celeberrimo ſui æui Mathematico Maurolico, & hoc quidem, vt fateor, haud temerè; nam quod in duabus præcedentibus propoſitionibus exponitur, profertur quoque in eius quinto conicorum libro, ab ipſo, vnà cum ſexto iam ſupra nonaginta annos proprio Marte ſuppleto, quamuis typis Meſſanæ tradito non antea annum 1654. ſedula opera eximij Mathematici, ac Philoſophi præſtantiſsimi Io. Alphonſi Borelli, qui, vt ipſemet aſſerit, ex multis Maurolici poſthumis lucubrationibus, apud Auctoris hæredes tunc extantibus, prædictum opus publici iuris fieri curauit, idemque mihi à duobus circiter annis primò indicauit, quod è Meſſana anxie petiens, tandem ab hinc paucis menſibus conſecutus ſui. At quicunque æquo, gratoque animo Maurolici demonſtrationes, cum meis conferat, dum diuerſa, expeditaque methodo generatim oſtenditur, ex præmiſſo Theoremate Lemmatico, duobus tantum Problematibus, vnicoque Corollario, totum id, quod integro libro peculiariter à Maurolico 24. Propoſitionibus, deceque, aut Corollarijs, aut Scholijs demonſtratur; curabitque vlterius procedendo, reliquum mei operis percurrere, in quo, tot aliæ, ex his emanantes concluſiones reperiuntur, à nemine, quod ſciam, hactenus animaduerſæ, hic quidem, vt ſpero, à tali ſuſpicione omnino remouebitur, & de prædictis promeritum ius, qualecunque ſit, mihi facilè tribuet. Sed ne tempus fruſtra teramus, inceptum opus proſequamur.

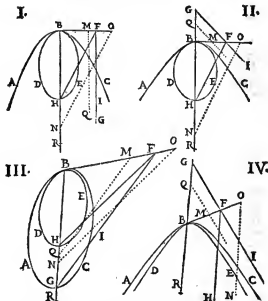
THEO-

THEOR. XII. PROP. XXII.

MAXIMA coni-ſectionum coni-ſectioni per verticem inſcriptibilium cum recto datæ ſectionis, eſt quoq; MAXIMA ſibi ſimilium, eidem ſectioni per verticem inſcriptarum. Et è contra.

MINIMA coni-ſectionum coni-ſectioni per verticem circumſcriptibilium cum recto datæ ſectionis, eſt quoque MINIMA ſibi ſimilium, eidem ſectioni circumſcriptarum.

SIt quælibet coni-ſectio ABC, cuius diameter BR, rectum BF, & regula GFI, ipſique inſcripta ſit per verticem B, cum recto BF coni-ſectio DBE, quæ erit *MAXIMA* inſcriptarum (per ea quę in præcedentibus oſtenſum



fuit) ſitq; huius regula HF. Patet has regulas infra contingentem BF in totum eſſe inter ſe diſiunctas, cum ſit altera ſectio alteri inſcripta. Iam dico hanc *MAXIMAM* ſectionem eſſe quoq; *MAXIMAM* ſibi ſimilium, eidem datæ ſectioni per B verticem inſcriptarum.

Quo-

Quoniam, quæcunque ſectio ſimilis ſectioni DBE adſcripta per B ſectioni ABC, cum recto BM, quod minus ſit recto BF, minor [a] eſt ſectione DBE, quælibet verò adſcripta cum recto BO; quod maius ſit recto BF [b] eſt quidem maior ipſa DBE, ſed datam ABC omnino ſecat; [c] quoniam ipſius regula ON, quæ [d] æquidiſtat regulæ FH, ſecat infra contingentem BF regulam FIG, nam altera parallelarum FH ab eadem FIG ſecatur in F: vnde ipſa DBE eſt *MINIMA* ſibi ſimilium, &c. Quod erat primò, &c.

[a] 5. Coroll. prop. 19. huius. [b] ibidem. [c] 1. Coroll. prop. 19. huius. [d] 5. prop. 19. huius.

Nunc verò ſit coni-ſectio DBE, cuius rectum BF, & regula FH, ipſique circumſcripta ſit cum eodem recto BF, per verticem B coni-ſectio ABC, quæ erit *MINIMA* circumſcripta, per iam demonſtrata, eiuſque regula ſit GFI. Dico hanc *MINIMAM* ſectionem ABC eſſe quoque *MINIMAM* ſibi ſimilium, eidem ſectioni DBE per verticem circumſcriptarum.

Nam quælibet coni-ſectio ſimilis ABC, adſcripta per B datæ ſectioni DBE, cum recto BO, quod maius ſit recto BF [e] maior eſt ſectione ABC, quælibet verò adſcripta cum recto BM, quod minus ſit recto BF eſt quidem minor ipſa ABC, ſed datam ſecat DBE, quoniam ipſius regula QM, quę regulæ GFI æquidiſtat, ſecat regulam FH, nam altera parallelarum GFI ſecat infra BF ipſam FH in F. Quare ipſa ABC eſt *MINIMA* ſibi ſimilium, &c. Quod erat ſecundò, &c.

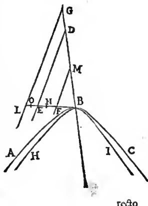
[e] 5. Coroll. prop. 19. huius.

PROBL. VIII. PROP. XXIII.

Datæ Hyperbolæ, cum dato quocunque tranſuerſo latere, per ipſius verticem MAXIMAM Hyperbolen inſcribere: & è contra.

Datæ Hyperbolæ cum dato quolibet tranſuerſo latere per eius verticem MINIMAM Hyperbolen circumſcribere.

Sit data Hyperbole ABC, cuius vertex B, tranſuerſum latus BD, rectum BE, & regula DE: oportet primò cum dato quocunque alio tranſuerſo latere, per verticem B, *MAXIMAM* Hyperbolen inſcribere.



Iam, vel datum tranſuerſum latus excedit tranſuerſum BD, datę Hyperbolæ, vel eodem minus eſt. Si primùm quale eſt BG; [a] adſcribatur Hyperbolę ABC per verticem B, cum dato tranſuerſo BG, & cum eodem recto BE Hyperbole HBI. Patet ipſam HBI datæ ABC [b] eſſe inſcriptam; quàm dico eſſe *MAXIMAM*: quoniam quælibet alia ipſi HBI adſcripta cum eodem tranſuerſo BG, ſed cum recto, quod ſit minus BE, ſemper minor [c] eſt ipſa HBI, quęlibet vero adſcripta cum

[a] 6. huius. [b] 3. Coroll. prop. 19. huius. [c] 2. Coroll. prop. 19. huius.

recto BI, quod excedat BL, est [a] quidem maior ipsa HBI, sed vel secat Hyperbolen ABC, quod accidit [b] si iuncta regula GL, ac infra contingentem BL producta, secet productam regulam DE; vel cadit extra eandē ABC, quando [c] iuncta regula GL, cum regula DE infra eandem contingentem nunquam conueniat. Quare huiusmodi Hyperbole HBI erit *MAXIMA* quæsita.

Si deniq; datū trāsuersum latus BM sit minus transuerso BD, ducatur MF ipsi BE parallela, & cū transuerso BM, ac recto BF, per verticem B, Hyperbolæ ABC adscribatur [d] Hyperbole HBI, quæ ipsi ABC similis erit, cum sit transuersum DB ad rectum BE, vt transuersum MB ad rectum BF, eritq; inscripta [e] Hyperbolæ ABC, cum sit minorum laterum. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam.

Quoniā quælibet alia, quæ cum recto minore ipso BF adscribitur, semper est [f] minor HBI, quæ verò cum recto, quod excedat BF, est quidem [g] maior ipsa HBI, sed vel secat Hyperbolen ABC, quod fit cum rectum cadit inter F, & E, vt in N, [h] nam iuncta regula MN, & producta, secat regulam DE infra contingentem BE; vel cadit tota extra ABC, quod euenit, cū rectum, vel idem fuerit cum recto BE, vel maius ipso BE, quale est BL; tunc enim iuncta regula ML infra contingentem BE, disiunctim procederet à regula DE, cum eam secaret priùs supra BE. Est igitur talis Hyperbole HBI *MAXIMA* quæsita. Quod primò, &c.

Amplius, sit data Hyperbole HBI, cuius transuersum latus sit BD, rectum BE, & regula DE, & ipsi oporteat per verticem B *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere, cum dato quolibet transuerso latere.

Si datum transuersum circumscribendæ Hyperbolæ fuerit minus ipso BD, quale est BM: adscribatur [l] datæ HBI, per verticem B Hyperbole ABC, cuius transuersum sit BM, rectum verò sit idem BE: Nam ipsa [m] erit circumscripta, eritque *MINIMA* quæsita; quoniam quælibet alia adscripta cum transuerso BM, sed cum recto quod excedat BE, quale esset BL, est [n] maior ipsa ABC; quælibet verò adscripta, cum eodem transuerso BM, & cum recto quod minus sit BE, est quidem minor [o] ipsa ABC, sed vel secat [p] Hyperbolen HBI, tum cum earum regulæ infra contingentem BE se mutuò secant, vel cadit intra [q] HBI, quando earundem regulæ infra prædictam contingentem nunquam simul conueniant. Quare ipsa ABC erit *MINIMA* quæsita.

Si autem datum transuersum latus fuerit maius ipso BD quale est BG; ducatur GL parallela ad DE, & datæ Hyperbolæ HBI cum transuerso BG, rectoque BL adscribatur [r] per B Hyperbole ABC, quæ datæ HBI erit similis, cum ipsarum latera sint proportionalia, eritque circumscripta, cum sit maio-

rum

[a] ibidem.
[b] 1. Coroll. prop. 19. huius.
[c] ibidem.
[d] 6. huius.
[e] 5. prop. 19. huius.
[f] 3. Coroll. prop. 19. huius.
[g] ibidem.
[h] 1. Coroll. prop. 19. huius.
[i] 3. 1. Coroll. prop. 19. huius.
[l] 6. prop. huius.
[m] 3. Corol. prop. 19. huius.
[n] 2. corol. prop. 19. huius.
[o] ibidem.
[p] 2. Coroll. prop. 19. huius.
[q] ibidem.
[r] 6. huius.

rum laterum. Dico hanc esse *MINIMAM* quæsitam: Nam quælibet alia, quę adscribitur cum recto maiore ipso BL, maior [a] est ipsa ABC, quælibet verò, quæ adscribitur cum recto minore ipso BL, est quidem [b] minor ABC, sed vel secat Hyperbolen ABC, quod accidet, cum rectum latus terminet inter E, & L, vt in O, [c] nam iuncta regula GO, si producatur, infra contingentem BO cum regula DE conueniret, ideoque, & sectiones; vel tota cadit intra HBI quod fit [d] quando rectum latus, vel sit idem cum recto BE, vel minus ipso BE, quale est BF, quoniam si iungatur regula GF, ipsa, atque regula DE se mutuò secarent supra contingentem BE, ideoque infra disiunctim simul procederent. Quare huiusmodi Hyperbole ABC, quæ similis est datæ HBI erit *MINIMA* circumscripta quæsita. Quod secundò faciendum erat.

[a] 2. Corol. 19. h. [b] ibidem. [c] 1. Corol. 19. h. [d] 1. Corol. 19. h.

PROBL. IX. PROP. XXIV.

Datæ Hyperbolæ, cum dato recto latere, quod recto datæ sit minus, per eius verticem MAXIMAM Hyperbolen inscribere, & è contra.

Datæ Hyperbolæ, cum dato recto latere, quod maius sit recto datę, per eius verticem MAXIMAM Hyperbolen circumscribere.

SIt data Hyperbole ABC, cuius transuersum BD, rectum BE, & regula DE; oportet per eius verticem B, cum dato recto BF, quod minus sit recto BE, *MAXIMAM* Hyperbolen inscribere,

Ducatur FG parallela ad ED, & cũ transuerso BG, rectoque BF adscribatur [a] per B ipsi ABC, Hyperbole HBI, quæ datæ ABC erit similis (cum ipsarum latera sint proportionalia) eritque inscripta [b] (cum sit minorum laterum) quàm dico esse *MAXIMAM* quæsitam: quoniam quælibet alia adscripta cum recto BF, sed cum transuerso, quod excedat BG minor est [c] ipsa HBI, quæcũque verò adscripta cum eodem recto BE, sed cum transuerso, quod sit minus transuerso BG, quale est BL, est quidẽ maior [d] ipsa HBI, sed omnino secat Hyperbolen ABC [e] cum iũcta regula LF, & producta, regulam DE infra contingentem BE omnino secet: quare ipsa HBI erit *MAXIMA* inscripta cum dato recto BF. Quod primò, &c.

[a] 6. huius. [b] 5. Corol. 19. h. [c] 3. Corol. 19. h. [d] ibidem. [e] 1. Corol. 19. h.

Sit iam data Hyperbole HBI, cuius regula GF, & datum rectum latus sit BE ipso BF maius, cum quo oporteat *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere.

Agatur ED ipsi FG æquidistans, & cum regula ED, datæ Hyperbolæ HBI

a 5. Coroll. prop. 19. huius. b 3. Coroll. prop. 19. huius. c ibidem.

adſcribatur[a] per B Hyperbole ABC, quæ ipſi HBI erit ſimilis (cum earum latera ſint proportionalia) eritque ei circumſcripta[b] (cum ſit maiorum laterum) & erit *MINIMA* quæſita. Nam quælibet alia adſcripta cum recto BE, ſed cum tranſuerſo, quod ipſo BD ſit minus[c] eſt maior ipſa ABC; quælibet verò adſcripta cum eodem recto BE, ſed cum tranſuerſo BM, quod excedat BD eſt quidem minor ipſa ABC, ſed omnino ſecat Hyperbolen HBI, cum iuncta regula ME, & producta omnino ſecet regulam GF infra contingentem BE. Vnde ipſa ABC erit *MINIMA* circumſcripta cum dato recto BE, vti quærebatur. Quod vltimò faciendum erat.

PROBL. X. PROP. XXV.

Datæ Ellipſi, cum dato latere, quod minus ſit eius recto, per ipſius verticem MAXIMAM Ellipſim inſcribere: & è contra.

Datæ Ellipſi, cum dato recto latere, quod maius ſit eius recto, per ipſius verticem MAHIMAM Ellipſim inſcribere.

a 1. Coroll. prop. 19. huius. b 7. huius. c 4. Coroll. prop. 19. huius. d ibidem. e 1. Coroll. prop. 19. huius.

SIt data Ellipſis ABC, cuius tranſuerſum BD, rectum BE, regula DE: oportet per verticem B, cum dato recto BF *MAXIMAM* Ellipſim inſcribere, neceſſe eſt autem, quod rectum datum BF minus ſit recto BE (ſi enim ei æquale eſſet, vel maius, etiam deſcribenda Ellipſis, vel eſſet[a] eadem cum data ABC, vel hanc ipſam ſecaret, vt ſatis patet, cum vel ipſarum regulæ ſimul congruerent, vel ſe mutuò ſecarent.)

Adſcribatur[b] cum eodem trãſuerſo BD, cumque dato recto BF, per verticem B, Ellipſis GBL: & hæc erit *MAXIMA* quæſita. Nam quælibet alia eidem ABC adſcripta cum recto BF, ſed cum tranſuerſo, quod minus ſit BD, eſt minor[c] ipſa GBL, quælibet verò adſcripta cum tranſuerſo BM, quod excedat BD eſt quidem[d] maior ipſa GBL, ſed omnino ſecat Ellipſim datam ABC[e] cum & iuncta regula FM, omnino ſecet regulam ED. Quare Ellipſis GBL erit *MAXIMA* quæſita inſcripta cum recto dato BF. Quod primò, &c.

f ibidem. g 7. huius. h 4. Coroll. prop. 19. huius. i ibidem.

Sit iam data Ellipſis GBL, cuius tranſuerſum BD, rectum BF, regula DF, & circumſcribenda ſit ei *MINIMA* Ellipſis cum dato recto BE, quod debet quidem eſſe maius recto BF (nam ſi æquale, vel minus eſſet, deſcribenda quoque Ellipſis, vel eadem eſſet cum data GBL, vel huic eſſet[f] inſcripta, cum vel harum regulæ ſimul congruerent, vel regula deſcribendæ caderet tota intra regulam deſcriptæ GBL.)

Adſcribatur[g] cum tranſuerſo BD, datoque recto BE, per verticem B, Ellipſis ABC, quæ erit *MINIMA* circumſcripta quæſita. Quoniam quæcunque alia adſcripta datæ GBL cum recto BE, ſed cum tranſuerſo, quod maius ſit BD, maior eſt[h] ipſa GBL; quælibet verò adſcripta cum tranſuerſo BN, quod minus ſit tranſuerſo BD, eſt quidem minor[i] ipſa ABC, ſed omnino

ſecat

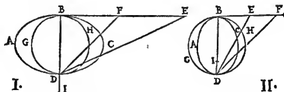
secat Ellipsim datam GBL, a cum & iuncta regula EN secet regulam FD. Quare Ellipsis ABC, erit *MINIMA* quæsita circumscripta, cum dato recto BE. Quod vltimò, &c.

PROBL. XI. PROP. XXVI.

Datæ Ellipsi circa minorem axim, per eius verticem MAXIMVM circulum inscribere. Item.

Datæ Ellipsi circa maiorem axim, per eius verticem MINIMVM circulum circumscribere.

Sit in 1. fig. data Ellipsis ABC, circa minorem axim BD, cuius rectũ sit BE, regula DE, & oporteat per verticem B *MAXIMVM* circulum inscribere. Describatur circulus GBHD, cuius dimetiens sit BD, quem dico esse *MAXIMVM* quæsitum.



Sumpta enim BF æquali BD, erit ipsa rectum latus descripti circuli: iunctaque DF eius regula cum sit axis minor BD, minor recto latere BE, erit etiam BF minor BE, vnde regula DF cadet intra regulam DE, ideoque circulus GBH inscriptus a erit Ellipsi ABC, eritque *MAXIMVS*: nam quilibet alius per B adscriptus, cuius diameter, minor sit ipsa BD, minor est b circulo GBH, & cuius diameter BI sit maior BD c est quidem maior circulo GBH, sed vel secat, vel cadit extra Ellipsim ABC, cum punctum I quoque cadat extra. Erit ergo GBH *MAXIMVS* circulus per verticem B minoris axis datæ Ellipsi ABC inscriptus. Quod primò erat, &c.

a 1. Coroll. prop. 19. huius.
b 5. Coroll. prop. 19. huius.
c ibidem.

Sit verò in 2. figura, data Ellipsis ABCD, cuius maior axis BD, rectum BE, regula DE. Oportet per verticem B *MINIMVM* circulum circumscribere.

Describatur circulus GBHD, cuius diameter sit axis maior BD. Dico hunc esse *MINIMVM* quæsitum.

Cum sit enim axis BD maior recto latere BE, sumpta BF æquali BD, ipsa erit latus rectum circuli GBH, & maior BE: vnde circuli regula DF cadet tota extra Ellipsis regulam DE, ac ideò circulus d erit Ellipsi circumscriptus, eritque *MINIMVS*; quoniam quilibet alius circulus GBH per B adscriptus, cuius diameter sit maior BD, est e maior ipso GBH, & quicunque alius, cuius diameter sit minor ipsa BD, qualis est BI, minor est quidem circulo GBH,

d 1. Coroll. prop. 19. huius.
e 5. Coroll. prop. 19. huius.

G 2 sed

ſed omnino, vel Ellipſim ſecat, vel intra eam cadit, cum punctum I ſit quoque intra. Quare circulus GBH *MINIMVS* eſt circumſcriptibilium per verticem B maioris axis datæ Ellipſis ABC. Quod ſecundò faciendum erat.

SCHOLIVM I.

Hinc facilè eruitur pulcherrima de *MAXIMIS*, & *MINIMIS* circulis, Ellipſi inſcriptis, & circumſcriptis proprietas. Nempe.

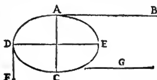
MINIMVM circulum per verticem minoris axis AC Ellipſi circumſcriptum, cuius diameter [a] eſt rectum latus AB.

MINIMVM circulum per verticem maioris axis DE circumſcriptũ, cuius diameter [b] eſt ipſe maior axis DE.

MAXIMVM circulum per verticem minoris axis AC inſcriptum, cuius diameter [c] eſt ipſe minor axis AC.

Et *MAXIMVM* circulũ per verticem maioris axis DE inſcriptum, cuius diameter [d] eſt rectum latus DF, eſſe quatuor circulos in continua eademque ratione geometrica; nam & ipſorum diametri AB, DE, AC, DF ſunt quatuor lineæ continuè proportionales.

[a] 1. Coroll. 20. h.
[b] 26. h.
[c] 26. h.
[d] 1. Coroll. 20. h.



SCHOLIVM II.

Elicitur quoque, Ellipſim quamcunque, mediam eſſe proportionalem inter extremos prædictos circulos, mediamque inter medios. Cum enim quatuor lineæ AB, DE, AC, DF ſint continuè proportionales, erit rectangulum ſub extremis AB, DF æquale rectangulo ſub medijs DE, AC, nempè quadrato G, quæ ſit media proportionalis inter DE, AC; hoc eſt vt AB ad G, ita erit G ad DF; quare circulus ex diametro AB, ad circulum ex diametro G, erit vt circulus G, ad circulum ex DF. Item cum ſit DE ad G, ita G ad AC, erit circulus ex DE ad circulum ex G, vt circulus G ad circulum ex AC, ſed circulus ex G [e] æquatur Ellipſi; vnde Ellipſis DAEC eſt media proportionalis inter extremos prædictos circulos AB, DF mediaque inter medios DE, AC.

[e] 5. Arch. de Conoid. & Sphæroid.



PRO-

PROBL. XII. PROP. XXVII.

Datæ portioni Parabolæ, cum dato quocunque tranſuerſo latere, vel cum dato recto, quod ſit minus recto datæ Parabolæ, per eius verticem MAXIMAM Hyperbolæ portionem inſcribere; & è contra.

Datæ portioni Hyperbolæ, per eius verticem MINIMAM Parabolæ portionem circumſcribere.

SIt data Parabolę portio ABCDE, cuius rectum CF, regula FG, baſis AE, diameter CI, & oporteat primùm cum dato quocunque tranſuerſo CH *MAXIMAM* Hyperbolæ portionem inſcribere.

Producatur applicata AI vſque ad occurſum cum regula in G, & iungatur HG, ſecans CF in L, & cum tranſuerſo CH, rectoque CL adſcribatur [a] portioni ABCDE per verticem C Hyperbole AMCNE, quæ Parabolen ABCDE ſecabit in [b] A, & E (cum & ipſarum regulæ ſe mutuò ſecēt in occurſu eiuſdem communis applicatæ AE) & ſupra baſim AE erit datæ Parabolę inſcripta. Iam dico hanc portionem AMCNE eſſe *MAXIMAM* quæſitam.

[a] 6. huius.
[b] 1. Coroll. prop. 19. huius.

Quoniam quælibet alia Hyperbole adſcripta cum eodem tranſuerſo CH, ſed cum recto, quod minus ſit recto CL, minor eſt [c] ipſa AMCNE, quælibet vero adſcripta cum recto, quod excedat CL, eſt quidem [d] maior ipſa AMCNE, ſed vel tota cadit extra ABCDE, cum Hyperbole, cuius regula ſit quæ ducitur per H & F ſit circumſcripta [e] Parabolæ ABC, & eò magis, quæ cum recto CO maiore ipſo CF; vel ſaltem ſecat [f] Parabolen ABC ſupra portionis baſim AE, cum quælibet regula ducta ex H inter L, & F, vt per P, & infra contingentem CF producta, ſecet regulam FG inter ipſam contingentem, & applicatam AEG. Quare talis Hyperbolæ portio AMCNE eſt *MAXIMA* inſcripta quæſita cũ dato tranſuerſo CH. Quod primò, &c.

[c] 2. Coroll. prop. 19. huius.
[d] ibidem.
[e] 21. h.
[f] 2. Coroll. prop. 19. huius.

Si vero inſcribenda ſit *MAXIMA* Hyperbolæ portio cum dato recto CL, quod minus ſit recto Parabolæ CF, (nam cum æquali, vel maiori ſemper eſſet circumſcripta) iungatur GL, & producatur, ipſa productam diametrum IC ſecabit in H, cum eadem ſecet FG alteram Parallelarum ipſi diametro; & cum tranſuerſo HC, rectoque CL [g] adſcribatur per C Hyperbole AMCNE, quæ ſecabit, vt ſupra, Parabolen ABCDE in [h] A, & E, eique erit inſcripta, eritque *MAXIMA*. Nam quæ cum eodem recto CL, ſed cum tranſuerſo, quod excedat CH, minor eſt [i] ipſa AMCNE; quæ verò cum tranſuerſo CQ minore ipſo CH, eſt quidem maior [l] Hyperbola AMCNE, ſed omnino ſecat [m] Parabolen ABCDE ſupra baſim AE, cum & eius regula QL infra contingentem producta, ſecet regulam FG ſupra eandem applicatam. Quare huiuſmodi portio Hyperbolæ AMCNE eſt *MAXIMA* inſcripta quæ-

[g] 6. huius.
[h] 1. Coroll. prop. 19. huius.
[i] 2. Corol. 10. huius.
[l] ibidem.
[m] 3. Corol. 19. h.

ſita

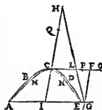
ſita cum dato recto CL. Quod ſecundò, &c.

Iam ſit data Hyperbolæ portio AMCNE, cuius tranſuerſum CH, rectum CL, regula HLG, baſis AE, diameter CI, & oporteat, per verticem C, *MINIMAM* Parabolæ portionem circumſcribere.

Producatur applicata AI, conueniens cum regula HL in G, & per G ducatur GF parallela ad IC contingentem ſecans in F, cumque recto CF adſcribatur [a] per C Parabole ABCDE, quæ ſecabit Hyperbolen in ijſdem punctis A, & E, ob rationem ſuperius allatam, & datę Parabolæ AB CD [b] erit circumſcripta; eritq; *MINIMA* portio.

a 5. huius.

b 1. Coroll. prop. 19. huius.



Quoniam, quæ cum recto maiore ipſo CF eſt maior [c] ipſa ABCDE, quæ verò cum recto minore ipſo CF eſt quidem minor [d] ABCDE, ſed vel tota cadit intra Hyperbolen AMCN [e] ſi nempe rectum æquale fuerit ipſo CL, & eò magis ſi minus eſſet BI; vel ſaltē ſecat Hyperbolen AMCN ſupra applicatam AE [f] tum cum rectum ſit medium inter CF, & CL, quale eſt CP: nam regula, quæ ex P, ducitur æquidiſtans CI, omninò ſecat regulam LG infra contingentem CF, & ſupra applicatam AG. Quare ipſa Parabolæ portio ABCDE, eſt *MINIMA* circumſcripta quæſita. Quod tandem faciendum erat.

c 2. Coroll. prop. 19. huius.

d ibidem.

e 21. h.

f 1. Coroll. prop. 19. huius.

PROBL. XIII. PROP. XXVIII.

Datæ portioni Hyperbolæ, cum dato tranſuerſo vel recto, quod minus ſit tranſuerſo, vel recto datæ Hyperbolæ, per eius verticem MAXIMAM Hyperbolæ portionem inſcribere: & è contra.

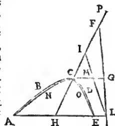
Datæ portioni Hyperbolæ, cum dato tranſuerſo vel recto, quod excedat tranſuerſum, aut rectum datæ Hyperbolæ, per eius verticem MINIMAM Hyperbolæ portionem circumſcribere.

Sit data Hyperbolæ portio ABCDE, cuius tranſuerſum CF, rectum CG, regula FGL, baſis AE, diameter CH. Oportet primò cum dato tranſuerſo CI, quod minus ſit ipſo CF *MAXIMAM* Hyporbolæ portionem inſcribere.

Producta enim applicata AH, cōueniat cum regula FG in L, & iuncta IL contingentem CG ſecante in M, cum regula IM, per verticem C adſcribatur [a] portioni ABCDE Hyperbole ANCOE, quę datam ABCD ſecabit [b] in A, & E, quę ipſi erit inſcripta. Dico portionē ANCOE eſſe *MAXIMAM* quæſitam.

a 6. huius.

b 1. Coroll. prop. 19. huius.



Quoniam, quę adſcribitur cum eodem tranſuerſo CI, ſed cum recto, quod ſit minus CM, eſt minor [c] ipſa ANCO, quæ verò

c 2. corol. prop. 19. huius.

verò cum recto, quod excedat CM, est quidem maior [a] ipsa ANCO, sed vel tota cadit extra ABCDE, cum Hyperbole, cuius regula IG [b] sit ei circumscripta, & eò ampliùs ea, quæ cum recto quod excedat CG; vel saltem secat Hyperbolen ABCD supra portionis basim AE [c] si rectum cadat inter M, & G. Vnde hæc Hyperbolæ portio ANCOE est *MAXIMA* inscripta quæsita, cum dato transuerso CI. Quod erat primò, &c.

[a] 1. Coroll. 19. h. [b] 14. h. [c] 1. Coroll. 19. h.

Si autem inscribēda sit *MAXIMA* Hyperbolæ portio cum dato recto CM, quod sit minus recto CG (cum æquali enim, vel maiori semper esset circumscripta) iuncta LM, & producta vsque ad occursum cum diametro in I; cum transuerso latere CI, ac recto CM adscribatur [d] per C Hyperbole ANCOE, quæ secabit [e] Hyperbolæ portionem ABCD in A & E, eique erit inscripta. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam. Quoniam quæ adscribitur per C cum eodem recto CM, sed cum transuerso, quod excedat CI, minor [f] est Hyperbola ANCO, quæ verò cum transuerso, quod minus sit ipso CI, & [g] quidem maior eadem ANCO, sed omninò secat [h] Hyperbolen ABCDE supra applicatam AE. Est igitur huiusmodi Hyperbolæ portio ANCO *MAXIMA* inscripta quæsita cum dato recto CM. Quod erat secundò, &c.

[d] 6. huius. [e] 1. Coroll. 19. h. [f] 3. Corol. 19. huius. [g] ibidem. [h] 1. Coroll. 19. h.

Ampliùs, sit data Hyperbolæ portio ANCOE, cuius versum CI, rectum CM, regula IML, basis AE, ac diameter CI, cui oporteat per verticem C, cum dato transuerso CF, quod maius sit CI *MINIMAM* Hyperbolæ portionem circumscribere.

Producatur semi-basis AH conueniens cum regula IM, in L, & iungatur FL contingentem CM secans in G, & cum transuerso CF, ac recto CG adscribatur [i] per verticem C Hyperbole ABCDE, quæ occurret datæ Hyperbolæ ANCO in punctis A, E, eique erit circumscripta supra basim AE, & erit *MINIMA* Hyperbolæ portio quæsita.

[i] 6. huius.

Quoniam, quæ adscribitur cum eodem verso CF, sed cum recto maiore ipso CG, est quoque maior [l] Hyperbola ABCD, quę verò cum recto minore ipso CG, est quidem minor [m] eadem ABCD, sed vel tota cadit intra datam ANCO [n] si nempe rectum æquale fuerit ipso CM, & eò magis si minus esset CM; vel saltem secat [o] Hyperbolen ANCO supra basim AE, quando rectum cadat inter CM, & CG; tunc enim harum regulæ se mutuò secarent, supra eandem basim AE. Vnde Hyperbolæ portio ABCDE, est *MINIMA* circumscripta quæsita cum dato transuerso CF. Quod tertiò, &c.

[l] 1. Corol. 19. huius. [m] 2. Coroll. 19. h. [n] ibidem. [o] 3. Corol. 19. huius.

Demùm eidem datæ Hyperbolæ ANCO, sit circumscribenda *MINIMA* Hyperbole cum dato recto CG, quod excedat datæ rectum CM. Facta eadem constructione, iungatur LG diametro occurrens in F, & cum transuerso CF, ac dato recto CG [p] adscribatur per C Hyperbole ABCDE, quæ datam secabit in A, & E [q] eique erit circumscripta, & erit *MINIMA* quæsita. Nam, quæ cum eodem recto CG, sed cum transuerso, quod minus sit CF, maior est [r] ipsa ABCD, quę verò cum transuerso, quod maius sit ipso CF, quale est CP, est quidem [s] minor, sed omnino secat, portionem ANCO supra basim AE, cum iuncta regula PG, & producta, secet regulam IL supra ipsam basim AE. Quare Hyperbolæ portio ABCD est *MINIMA* circumscripta quæsita cum dato recto CG. Quod tandem faciendum erat.

[p] 1. Coroll. 19. h. [q] 6. huius. [r] 1. Coroll. 19. h. [s] 3. Corol. 19. huius.

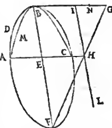
PRO-

PROBL. XIV. PROP. XXIX.

Datæ portioni circuli, vel Ellipsis, per eius verticem MAXIMAM Parabolæ portionem inscribere; & è contra.

Datæ portioni Parabolæ per eius verticem, cum dato recto, quod excedat rectum datæ Parabolæ, vel cum dato transuerso, quod maius sit diametro datæ portionis MINIMAM Ellipsis portionem circumscribere.

Sit data circuli, aut Ellipsis portio ABC, cuius diameter sit BE, basis AC. Oportet per eius verticem B, *MAXIMAM* Parabolæ portionem inscribere.



Sit BF transuersum latus dati circuli, vel Ellipsis, BG rectum, & FG regula, cui producta AE occurrat in H, & per H agatur LHI ipsi BF æquidistans, & cum recto BI, per verticem B adscribatur [a] portioni ADBC Parabole AMBC, quæ per extrema A, C [b] transibit, ac datæ portioni supra basim AC erit inscripta, & erit *MAXIMA*: quoniam, quæ adscribitur cum recto, quod minus sit BI minor [c] est ipsa AMBC, quæ verò cum recto, quod excedat BI, vel tota cadit extra Ellipsis portionem ADB, si nempe [d] eius rectum sit idem cum recto BG, & eo magis si ipsum excedat; vel ad minus secat datam portionem supra basim AC, si Parabolę rectum cadat inter I, & G, vt in N. Nam [e] eius regula ex N ducta æquidistanter ipsi IH omninò secat Ellipsis regulam HG supra basim AC. Quare Parabolæ portio AMBC est *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod primò, &c.

a 5. huius.
b 1. Coroll. 19. h.
c 2. Coroll. prop. 19. huius.
d 20. h.
e 1. Coroll. 19. h.

Iam sit data Parabolæ portio AMBC, cuius rectum BI, regula IL, diameter BE, basis AC, & per eius verticem B oporteat *MINIMAM* Ellipsis portionem ei circumscribere cum dato recto BG, quod excedat rectum datæ portionis.

Conueniat applicata AE cum regula IL in H, iunctaq; GH, & producta, occurrat portionis diametro in F (secans enim vnam parallelarum IH, secat alteram BE:) cum transuerso autem BF, ac dato recto BG [f] adscribatur per B Ellipsis ADBC, quæ datę Parabolæ AMB occurret in A, & C, & [g] erit circumscripta, quàm dico esse *MINIMAM*. Nam Ellipsis quæ adscribitur per B, cum eodem recto BG, sed cum transuerso, quod excedat BF, maior est [h] ipsa ADB; quæ verò adscribitur cum transuerso, quod minus sit ipso BF [i] est quidem [i] minor eadem ADB, sed omnino secat Parabolen AMBC supra basim AC, [l] cum & ipsarum regulę se mutuò secent supra eandem AC. Quare Ellipsis portio ADBC est *MINIMA* circumscripta quæsita cum dato recto BG. Quod secundò, &c.

f 7. huius.
g 1. Coroll. prop. 19. huius.
h 4. Coroll. prop. 19. huius.
i ibidem.
l 1. Coroll. 19. huius.

Sit tandem circumscribenda datæ portioni Parabolicæ AMB *MINIMA*

Ellipsis

Ellipsis portio per verticem B, cum dato transuerso BF, excedens diametrum BE.

Iungatur FH, & producatur, contingentem BI secans in G, & cum dato transuerso BF, ac recto BG [a] adscribatur per B Ellipsis portio ADBC, quæ item datæ portioni AMB occurret in punctis A, C [b] eritque circumscripta: Nam quæ cum eodem transuerso BF adscribitur, sed cum recto maiore ipso BG est [c] quoque maior Ellipsi ADB; quæ verò cum recto, quod deficiat à BG est [d] quidem minor ipsa ADB, sed vel tota cadit intra AMB, quãdo rectum Ellipsis [e] idem fuerit cum recto Parabolæ BI, & eò magis cum fuerit minus; vel saltem secat [f] Parabolen AMBC supra applicatam AC, cum rectum cadat inter BI, & BG, quale est BN; nam iuncta regula FN secat omnino regulam IH supra eandem AC. Quare huiusmodi portio Elliptica ADBC, est *MINIMA* circumscripta quæsita cum dato transuerso BF. Quod tandem erat faciendum.

[a] 7. huius. [b] 1. Coroll. prop. 19. huius. [c] 4. Coroll. prop. 19. huius. [d] ibidem. [e] 20. h. [f] 1. Coroll. prop. 19. huius.

PROBL. XV. PROP. XXX.

Datæ portioni circuli, vel Ellipsis, cum dato quocunque transuerso latere, vel cum dato recto, quod minus sit latitudine semi-applicatæ basis portionis, per eius verticem MAXIMAM Hyperbolę portionem inscribere; & è contra.

Datæ portioni Hyperbolæ, cum dato quocunque transuerso latere, quod maius sit diametro datæ portionis, vel cum dato recto, quod excedat prædictam latitudinem, per eius verticem MINIMAM Ellipsis portionem circumscribere.

Sit data circuli, aut Ellipsis portio ABCD, cuius diameter CE, basis AD, transuersum latus CF, rectum CG, & regula FG. Oportet per eius verticem C, cum dato quocunque transuerso CI *MAXIMAM* Hyperbolę portionem inscribere.

Producatur AE, vsq; ad occursum cum regula FG in L, & iungatur IL contingentem CG secans in M, & cum dato transuerso CI, ac recto CM adscribatur [a] per C Hyperbolæ portio ANCD, quæ datæ portioni ABCD occurret in A, & D, eritq; [b] inscripta; quàm dico esse *MAXIMAM*: nã quę adscribitur cum eodem transuerso CI, sed cum recto minore ipso CM, est quoq; [c] minor Hyperbola ANCD, quę verò cum recto maiore CM, vel tota cadit extra datam Ellipsim ABCD, quando [d] videlicet eius rectum latus æquet ipsum CG, & eò magis si rectum excedat CG; vel

[a] 6. huius. [b] 1. Coroll prop. 19. huius. [c] 2. corol. prop. 19. huius. [d] 20. h.

saltem secat portionem ABC supra basim AD, si rectum cadat inter M, & G, quale est CO nam [a] iuncta regula IO, & producta omnino secat regulam GL supra eandem AD. Quare Hyperbolæ portio ANCD est *MAXIMA* inscripta quæsita cum dato transuerso CI. Quod erat primò, &c.

[a] 1. Coroll. prop. 19. huius.

Iam eidem Ellipticæ portioni ABCD inscribenda sit *MAXIMA* Hyperbolæ portio cum dato recto CM, quod tamen sit minus latitudine EL, semi applicatæ AE (si enim ei æquale, vel maius esset, iuncta regula LM nunquam cum diametro EC conueniret supra C.

Iungatur LM, quę ideo producta occurret diametro in I, & cum transuerso IC, datoq; recto CM adscribatur [b] per C Hyperbolæ portio ANCD, quæ datæ portioni ABC occurret in A, & D, & [c] erit inscripta; quàm dico esse *MAXIMAM*: nam quę adscribitur cum eodem recto CM, sed cum transuerso, quod excedat CI minor [d] est ipsa ANC; quæ verò cum transuerso, quod sit minus CI, quale est CP, est [e] quidem maior ipsa ANC, sed omnino secat datam portionem ABC, supra basim AD [f] cum iuncta regula PM, & producta, omnino secet regulam GL supra eandem AD. Quare huiusmodi Hyperbolæ portio ANCD, est *MAXIMA* inscripta cũ dato recto CM. Quod secundò, &c.

[b] 6. huius.
[c] 1. Coroll. 19. h.
[d] 4. Coroll. 19. h.
[e] ibidem.
[f] 1. Coroll. 19. h.

Ampliùs sit data Hyperbolę portio ANCD, cuius transuersum CI, rectum CM, regula IM, diameter CE, basis AD: oportet per verticem C *MINIMAM* Ellipsis portionem circumscribere cum dato transuerso CF, quod tamen excedat diametrum CE.

Producatur item AE occurrens regulæ IM in L, & iungatur FL, quæ producta conueniat cum contingente CM in G, & cum dato transuerso CF, ac recto CG adscribatur [g] per C Ellipsis portio ABCD, quæ datæ Hyperbolæ occurret in A, D, eritque circumscripta, & erit *MINIMA*; Nam quæ adscribitur cum eodem transuerso CF, sed cum recto, quod excedat CG est [h] maior ipsa ABC, quæ verò cum recto, quod minus sit CG; vel tota cadit intra ANCD, tùm cum rectum æquet ipsum CM, & [i] eò magis si ipso sit minus; vel saltem secat portionem ANC supra basim AD, quando [l] nempe rectum cadat inter CM, & CG, quale est CO, nam iuncta regula FO, omnino secat Hyperbolæ regulam ML supra eandem AD. Quapropter Ellipsis portio ABCD, erit *MINIMA* circumscripta cũ dato transuerso CI. Quod tertiò, &c.

[g] 7. huius.
[h] 1. Coroll. 19. h.
[i] 1. Coroll. 19 h.
[l] 20. h.

Postremò, datis ijsdem, sit circumscribenda *MINIMA* Ellipsis portio, cum dato recto CG, quod tamen excedat latitudinem EL (ad hoc vt iuncta regula GL cum diametro CE possit conuenire infra E) & ipsa GL occurrat CE in F, & cum dato recto CG, ac transuerso CF adscribatur [m] per C Ellipsis portio ABCD, quæ item datæ portioni occurret in A, & D, eritq; [n] circumscripta; quàm dico esse *MINIMAM*: quæ enim adscribitur cum eodem recto CG, sed cum transuerso, quod sit maius CF, est etiam [o] maior ipsa ABC;

[m] 7. h.
[n] 1. Coroll. 19. h.
[o] 4. Coroll. prop. 19. huius.

quæ

quæ verò cum transuerso, quod deficiat à CF, est quidem [a] minor ipsa ABC, sed omnino secat Hyperbolæ portionem ANC supra basim AD [b] cum & iuncta regula secet datæ portionis regulam ML supra AD. Quare Ellipsis portio ABCD est *MINIMA* circumscripta cum dato recto CE, Quod vltimò, &c.

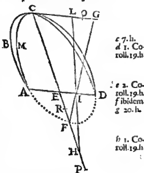
[a] 4. Coroll. 19. h.
[b] 1. Coroll. 19. h.

PROBL. XVI. PROP. XXXI.

Datæ portioni circuli, vel Ellipsis, cum dato transuerso latere, quod excedat versum, vel cum dato recto, quod minus sit recto datæ portionis, maius verò latitudine semi-applicatæ basis portionis, per eius verticem MAXIMAM Ellipsis portionem inscribere. Item.

Datæ portioni circuli, vel Ellipsis, cum dato transuerso, quod minus sit transuerso, sed maius diametro datæ portionis, vel cum dato recto, quod excedat rectum datæ portionis, per eius verticem MINIMAM Ellipsis portionem circumscribere.

Sit data circuli, vel Ellipsis portio ABCD, cuius diameter CE, basis AD, versum CF, rectum CG, & regula CF. Oportet per verticē C *MAXIMAM* Ellipsis portionem inscribere, cum dato transuerso CH, quod sit maius ipso CF.



Applicata AE, & producta occurrat regulæ FG in I; iunctaque HI, conueniat producta cum contingente CG in L, & cum dato transuerso CH, rectoq; CL adscribatur [c] per C Ellipsis portio AMCD, quæ per extrema basis AD transibit [d] datæque portioni erit inscripta. Iam dico hanc esse *MAXIMAM*. Nam quæ adscribitur cum eodem verso CH, sed cum recto, quod minus sit ipso CL, minor est [e] est ipsa AMCD; quæ verò cum recto, quod excedat CL, est quidem [f] maior AMCD, sed vel tota cadit extra ABCD, tum [g] cum eius rectū adæquet CG, tū cū ipsum excedat; vel saltim secat datā portionem ABCD supra basim AD quando [h] rectū cadat inter CL, & CG, quale est CO, nam iuncta regula HO, secat omnino regulā IG supra eandem AD. Vnde Ellipsis portio AMCD est *MAXIMA* inscripta cum dato trāsuerso CH. Quod primò, &c.

[c] 7. h.
[d] 1. Coroll. 19. h.
[e] 2. Coroll. 19. h.
[f] ibidem.
[g] 20. h.
[h] 1. Coroll. 19. h.

Iam, ijsdem positis, oporteat cum dato recto CL, quod minus sit recto CG; maior verò latitudine EI, *MAXIMAM* Ellipsis portionem inscribere.

Iungatur LI, & producatur, conueniens cum diametro CE in H, & cum transuerso CH, datoque recto CL [i] adscribatur per C Ellipsis portio AMCD, quæ datæ portioni [l] occurret in A, & D, eique erit inscripta. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam.

Quæ enim adscribitur cū eodem recto CL, sed cum verso, quod minus sit ipso CH est [m] minor portione AMCD; quæ autem cum verso, quod excedat CH, quale est CP, est quidem [n] maior ipsa AMCD, sed omnino secat Ellipsim ABCD supra basim AD [o] cum iuncta regula PL, secet regulam IG supra eandem

[i] 7. h.
[l] 1. Coroll. 19. h.
[m] 4. Coroll. 19. h.
[n] ibid.
[o] 1. Coroll. 19. h.

AD. Quare Ellipsis portio AMC est *MAXIMA* inscripta cum dato recto CL. Quod secundò, &c.

SIt verò data Ellipsis portio AMCD, cuius transuersum CH, rectum CL, regula LH, basis AD, & diameter CE: oportet per verticem C *MINIMAM* Ellipsis portionem circumscribere, cum dato transuerso CF, quod minus sit verso CH datæ portionis, maius verò eius diametro CE.

Producta semi-applicata AE, occurrat regulæ LH in I, & iuncta FI occurrat contingenti CL in G, & cum transuerso dato CF, cumque recto CG adscribatur [a] per C Ellipsis portio ABCD, quæ item per A, & D transibit, & [b] portioni AMC erit circumscripta, quàm dico esse *MINIMAM*. Quælibet enim adscripta Ellipsis cum eodem transuerso CF, sed cum recto, quod maius sit ipso CG, est maior [c] eadem ABCD; quæ verò cum recto, quod minus sit CG est quidem [d] minor eadem ABC, sed vel tota cadit intra datam AMCD, tum, cum rectũ idem fuerit cum recto CL, aut ipso minus; vel [e] saltem secat portionem AMC supra basim AD, quando nempe illius rectum cadat inter CL, & CG, quale est CO, nam iuncta regula OF, omnino secat regulam LH supra eandem applicatam AD. Quare huiusmodi portio Elliptica ABCD erit *MINIMA* circumscripta cum dato transuerso CF. Quod tertiò, &c.

[a] 7. hu.
[b] 1. Coroll. 19. h.
[c] 2. Coroll. 19. h.
[d] ibid.
[e] 1. Coroll. 19. h.

Sit tandem circumscribenda portioni AMC *MINIMA* Ellipsis portio cum dato recto CG, quod tamen superet rectum CL.

Iungatur GI, & producatur, donec conueniat cum diametro in F, & cum transuerso CF, datoque recto CG adscribatur [f] per C, Elliptica portio ABC, quæ pariter per A, & D transibit [g] eritque datæ portioni circumscripta: insuper dico hanc esse *MINIMAM* quæsitam.

[f] 7. h.
[g] 1. Coroll. 19. h.

Ellipsis enim, quæ adscribitur per C cum eodem recto CG, sed cum transuerso, quod excedat versũ CF est maior [h] ipsa ABCD, quæ verò cum trãsuerso, quod minus sit ipso CF, quale est CR, est quidem [i] minor eadem ABCD, sed omnino secat portionem AMCD supra basim [l] AD cum & iuncta regula CR secet datæ portionis regulam LI supra eandem basim AD. Quare Ellipsis portio ABCD est *MINIMA* circumscripta cum dato recto CG. Quod vltimò, &c.

[h] 4. Coroll. 19. h.
[i] ibidem.
[l] 1. Coroll. 19. h.

THEOR. XIII. PROP. XXXII.

Parabolæ, vel Hyperbolę cum earum diametris, iuxta ordinatim semi-applicatas sunt semper simul recedentes, & ad interuallum perueniunt maius quolibet dato interuallo.

PRimum facilè constat ex 20. ac 21. primi Conic. Secundum verò sic.

Ducta enim cõtingente ex sectionis vertice, quę quodam dato interuallo sit maior, atq; ex eius termino ducta alia, quæ ipsi diametro sit æquidistans, hæc omnino in vno tantùm puncto cum sectione cõueniet, [m] à quo si agatur contingenti

[m] 26. pr. Conic.

genti parallela, erit hæc vna ordinatim ad diametrum semi-applicatarum, datumq; interuallum superabit: vnde patet propositum. Quod, &c.

THEOR. IV. PROP. XXXIII.

Parabolæ inæqualium laterum per eundem verticem simul adscriptæ, sunt inter se nunquam alibi coeuntes, & inscripta est ea, cuius rectum latus minus est, suntque, in infinitum productæ, iuxta intercepta applicatarum segmenta semper magis recedentes, & ad interuallum perueniunt maius quolibet dato interuallo.

SInt duæ Parabolæ ABC, DBE, per eundem verticem B simul adscriptę, quarum communis diameter B H, & rectum sectionis ABC sit linea BF, DBE verò sit minor BG. Dico primùm has nunquam alibi simul conuenire, & DBE inscriptam esse. Hoc enim iam patet ex 2. Coroll. 19. huius.

Ampliùs, dico has in infinitum productas semper esse inter se magis recedentes.

Ductis enim regulis FO, GP, & applicatis vbicunque duabus ADH, ILM; quæ productę secent regulas in P, O, N, R; manifestum iam est ex 1. h. has regulas inter se æquidistare: & cum sit vt quadratum IM ad ML, ita [a] recta RM ad MN, vel vt OH ad HP, vel vt quadratum AH ad HD, erit etiam recta IM ad ML, vt AH ad HD, & per conuersioné rationis, & permutando IM ad AH, vt IL ad AD, sed est IM [b] maior AH, quare, & IL erit maior AD. Quod secundò, &c.

[a] 6. Corol. 19 h.
[b] 32. h.

Demũ dico, has aliquando peruenire ad interuallũ maius quolibet dato NO.

Fiat vt AD ad DH, vel vt IL ad LM, quod idem est, (modò enim ostẽdimus omnes huiusmodi applicatas proportionaliter diuidi à Parabola BDL) ita datũ interuallum NO ad aliud OP, & ducta ex vertice contingente BQR sumatur BR æqualis PN, & BQ æqualis PO, & per R agatur RI diametro BM æquidistans, quæ Parabolæ ABC [c] occurrat in I, & per I applicetur ILM. Erit ergo IM æqualis RB, siue æqualis NP, estque vt IL ad LM, ita NO ad OP, ex constructione, quare IL ipsi NO ęqualis erit, sed applicatę infra IL inter Parabolas excedunt ipsam IL, vti nuper ostendimus: quare huiusmodi Parabolæ ad interuallum perueniunt maius dato interuallo NO. Quod vltimò erat, &c.

[c] 26. pr. conic.

MONITVM.

HVC Franciscum Barocium subaudiet fortasse aliquis admurmurantem, nos, qui de asymptoticis lineis mutuam accessionem, vel recessionem perpendendam suscepimus, æquidistantium linearum segmentis, inter conuergentes, ac diuergentes asymptotos interceptis vsos fuisse, veluti in præcedenti, vbi iuxta lineas, siue portiones AD, IL ex ordinatim applicatis ad communem diametrum, datarum sectionum distantias commetimur; dum tamen ipsæ à breuissimis, seu MINIMIS lineis sint determinandæ, atque hæ

nostræ

nostra æquidistantium portiones non sint MINIMAE, quæ à punctis alterutrius sectionis super aliam educi queant: vnde ob hoc Hieronymum Cardanum assectari nos debuisse, qui iuxta perpendiculares à punctis hyperbolicæ sectionis super asympton ductas, ipsarum linearum interualla meditatus est; quod nullos alios, admirandum Apollonij hoc Theorema discutientes, animaduersos fuisse, idem Barocius in suo quodam commentario Geometrico sæpiùs admonuit, inter alia hæc proferens; quem errorem, omnes quos vidi huius rei Auctores commiserunt, præter Cardanum. *Sed hùc tã bonum Virum edoctum velimus, hoc idem iamdiu nobis innotuisse, verùm dedita opera, ac libenter in hoc deficere nobis placuisse cum summis Viris, quales, eos inter quos maximè colimus, sunt Torricellius, & Gregorius à S. Vincentio, immo ipsemet Apollonius tam reconditi symptomatis fortasse primus, & acutissimus indagator. Præterea, nos quoque satis agnouisse, vnius puncti distantiam à quacunque seu recta, seu curua linea, strictim assumendam esse iuxta MINIMAM ex eodem puncto, super datam lineam eductam. Insuper ipsam MINIMAM demissæ quæ data recta, vel contingenti ad datam curuam in puncto occursus perpendiculariter insistere; quæ omnia hùc in proximo nostro libello perspicuè apparebunt: attamen hisce, alijsque notionibus de his instructi, alteram methodum consultò eligere maluimus. Itaquè ab humanissimo Barocio de hoc, cui sanè criminis nomen falsò tribuitur, veniam expectamus; dum nos etiam, & sua, quæque sint ab ipso sparsim prolata reticere parati sumus. Interea concedat quæso, vt ad inuentionem MAXIMARVM MINIMARVMque coni-sectionum per diuersos vertices inscriptibilium, aut circumscriptibilium, vel saltim vt genio quodam nostro indulgendo, harum sectionum distantias per æquidistantium interposita segmenta nobis perscrutari liceat. Perlegat insuper, simulque has meditationes percipiat; quod si ex hac hypothesi ipsas euidenter comprobatas inuenerit, fateatur, si lubet, nos abundè in his Geometræ partem expleuisse; sin aliter, incusatione dignos existimet.*

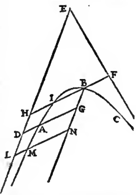
Scias itaque, ac iterum scias candide Lector nos, tum in decima huius, tum in superioribus, ac deinceps, vbi de non coincidentibus lineis disserimus, harum interualla semper assumpsisse iuxta interiecta parallelarum segmenta, licet hoc sæpenumero prætermittatur, cum ex ipso demonstrationum processu id satis superque se in conspectum præbeat. Quod si subijciat Barocius, non quidem intercapedines à punctis vnius ad alteram coni-sectionem, verùm longitudines tantùm illarum æquidistantium portionum sic meditari; illum æquiter ratiocinasse nos ipsi profectò fatebimur, quamuis & eadem parallelarum portiones verè dici possint distantiæ à punctis vnius sectionis ad aliam; prout lineæ omnes, ab vno eodemque puncto ducibiles, dicuntur interualla ab ipso puncto ad eandem lineam, etiamsi eductæ inter se plurimùm differant longitudine.

Quò verò ad methodum iuxta MINIMAS, plura sunt, quæ à nobis huc essent in medium afferenda, sed non est cur in præsens futilem disceptationem aggrediamur. At si quis nos ad huius Pelagi traiectionem deuinctos censeret (quamuis præstantiori fortasse luce orbati, nempe conica Apollonij ineditorum librorum doctrina) diuino tamen præsidio, nostris quibusdam inuentis mox huc edendis innixi, nauem integra ad portum appellere non dubitaremus; sed interim eum, non proprij officij causa, sed pro sua tantùm humanitate, nonnulla valde iucunda Problemata enodanda recipere exoptaremus, quæ nobis circa nouam quandam meditationem nuper assequi datum est. Sed missis parergis rem iam susceptam progrediamur.

THEO-

THEOR. XV. PROP. XXXIV.

Si à puncto, quod est in Hyperbola ducatur recta linea alteri asymptoton æquidistans, ipsa, ac sectio, quæ inter has parallelas intercipitur, in infinitum productę sunt infra occursum semper magis recedentes, sed tamen nunquam perueniunt ad interuallum æquale cuidam dato interuallo; dum earum distantia metiatur per interceptas æquidistantes cuilibet rectæ, quæ ducta sit ex occursu vtramque asymptoton secans.



Sit Hyperbole ABC, cuius asymptoti ED, EF, sitque ex quolibet sectionis puncto B recta BGN alteri asymptoto ED æquidistans, quæ intra sectioné cadens, in nullo alio pũcto quam B cum ipsa [a] conueniet. Dico primùm (si ex B ducatur quæcunque HBF vtranq; asymptoton secans) ipsam, & sectionem IAM infra BI esse sẽper magis inter se recedẽtes. [a] Coroll. 11. huius.

Applicentur quotcunque DAG, LMN infra HB, ipsi æquidistantes, patet has omnes LN, DG, HB inter se æquales esse, sed est DA [b] minor HI, ergo AG maior erit IB, estque LM minor DA, quare & MN maior AG, & hoc semper si in infinitum producantur; ergo linea BGN, & sectio IAM sunt semper simul recedentes. Quod primò, &c. [b] 10. h.

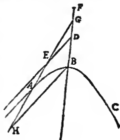
Et quoniam earum interuallum, per easdem interceptas metitum, semper minus est BH interuallo parallelarum BN, HL, cum sit GA minor GD, NM minor NL, & omnes GD, NL, &c. ipsi BH ęquales: quapropter, licet huiusmodi lineæ sint semper magis recedentes, non tamen perueniunt ad interuallum æquale interuallo BH. Quod erat tandem, &c.



THEO-

THEOR. XVI. PROP. XXXV.

Si recta linea diametro Hyperbolæ vltrà centrum occurrens, alteram ipsius asymptoton secet, producta sectionem quoq; secabit.



ESto Hyperbole ABC, cuius cētrum D, asymptotos DE, diameter BDF, è cuius puncto G vltrà cētrum assumpto ducta sit quæpiam linea GE asymptoton secans in E; Dico, si producatur, sectionem quoque secare.

Ducta enim ex vertice B recta BH parallela ad DE, ipsa ad partes A nunquam sectioni [a] occurret, cum ei occurrat in B, sed GE secat alteram Parallelarum DE, quare producta secabit, & reliquam BH, vnde necessariò sectionem priùs secabit. Quod, &c.

[a] Coroll. 11. huius.

THEOR. XVII. PROP. XXXVI.

Hyperbolæ per eundem verticem simul adscriptæ, æquale rectum latus habentes sunt inter se nunquam coeuntes, & semper inter se magis recedentes, & in infinitum productæ ad interuallum perueniunt maius quocunque dato interuallo.

SInt duæ Hyperbolæ ABC, DBE per eundem verticem B simul adscriptę, quarum rectum latus sit idem BF, transuersum verò Hyperbolæ ABC sit minor recta BH, & regula HF; Hyperbolæ autem DBE sit maior recta BG eiusque regula sit GF: dico primùm has inter se simul esse non coeuntes.

Cum enim Hyperbole DBE, maius habens trāsuersum latus, inscripta [a] sit Hyperbolæ ABC, patet ipsas, licet in infinitum producantur, nunquam inter se conuenire, vnde erunt simul non coeuntes.

Iam dico ipsas esse simul semper recedentes. Applicatis enim duabus quibuscunque rectis CEILM, PONQR, iungatur quoque FN rectam MI secans in S. Cum sit LS minor LI habebit ML ad LS maiorem rationem quàm ML ad LI, & componendo MS ad SL, siue RN ad NQ, hoc est [b] quadratum PN ad NO, habebit maiorem rationem, quàm MI ad IL, hoc [c] est quàm quadratum CI ad IE, siue applicata PN ad NO maiorem habebit rationem quàm applicata CI ad IE: si ergo fiat vt PN ad NO, ita CI ad IT, habebit CI ad IT maiorem rationem quàm CI ad IE, ergo IT erit minor IE, ideoque CT maior CE: cumque sit PN ad NO vt CI ad IT, erit per conuersionem rationis, & permutando PN ad CI vt PO ad CT, sed [d] est PN maior CI; quare PO maior erit ipsa CT, estque CT maior CE, ergo PO adhuc maior

[a] 4. Corol. 19. huius.
[b] 4. Coroll. prop. 19. huius.
[c] ibidem.
[d] 32. h.

maior erit ipſa CE. Quò ergo interceptæ PO magis remouentur à vertice B, eò ſunt maiores: quare huiuſmodi ſectiones inter ſe ſunt ſemper recedentes. Quod ſecundò, &c.

Præterea ſit BY ſectionem contingens in B,& bifariam ſectis trãſuerſis lateribus, nempe GB in V, & HB in X: cum ſit tranſuerſum GB maius BH, erit dimidium BV maius dimidio BX: iam ex centro V ducatur VY aſymptotos inſcriptæ Hyperbolæ DBE, & ex centro X agatur XZ aſymptotos circumſcriptæ ABC, quæ aſymptoti contingentem BI ſecent in Y, Z, & per X agatur X& parallela ad BY contingentem ſecans in &.

Itaque quadratum BY ad BZ eſt, vt rectangulum GBF ad rectangulum HBF (vtrumque enim quadratorum [a] eſt quarta pars ſuæ figuræ) vel vt recta GB ad BH, vel ſumptis ſubduplis, vt VB ad BX, vel ob parallelas, vt YB ad B&, quare BZ eſt media proportionalis inter BY, & B&: cum ergo inter parallelas VY, Z& recta ZX ſecet alteram parallelarum X& in X, ipſa producta ad partes Z ſecabit quoque alteram parallelam VY infra BY: vnde harum ſectionum aſymptoti infra contingentem ex vertice inter ſe conueniunt. a 8.huius.

Amplius cum aſymptotos VY inſcriptæ occurrat diametro BG vltra centrum X circumſcriptæ Hyperbolę ABC in puncto V, ipſaque aſymptotos VY conueniat cum XZ aſymptoto circumſcriptæ ABC, vt modò oſtendimus, ſi producatur, [b] ſecabit quoque Hyperbolen ABC. Quare aſymptotos inſcriptæ ſecat Hyperbolen circumſcriptam. b 35.h.

Tandem cum harum ſectionum aſymptoti infra contingentem BY ſe mutuò ſeceat,& XZ aſymptotos circũſcriptæ BCP,cadat tota extra ipsã BCP, harum aſymptoton occurſus erit extra eandem BCP, vt in 2: & cum VY 2 aſymptotos inſcriptæ, ſecet Hyperbolen BCP circumſcriptam, eſto earum communis ſectio in 3, & recta 2 3, producatur ad inferiores partes 4, atque ex 3 ducatur recta 3 5 parallela ad X 2 aſymptoton circumſcriptæ BC3, quę recta 3 5 nunquam conueniet [c] cum ſectione 3 7 ad inferiores partes, ſed etiam recta 3 4 nunquã conuenit cum ſectione BE6 ad eaſdem partes (nam eſt eius aſymptotos) & duæ rectæ 3 5, 3 4 ſunt ſemper ſimul recedentes, & ad interuallum perueniunt maius quolibet dato interuallo; quare eò magis interuallum ſectionum BC7, BE6, datum quodcunque interuallum excedet. Quod erat vltimò demonſtrandum. c 34.h.

COROLL.

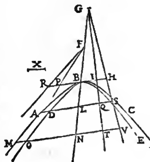
EX hac manifeſtum fit, quod Hyperbolarum per eundem verticem ſimul adſcriptarum, & idem rectum latus habentium aſymptoti infra contin-

I gentem

gentem ex vertice se mutuò secant, (extra tamen circumscriptam) & asymptotos inscriptæ secat Hyperbolen circumscriptam.

THEOR. XIII. PROP. XXXVII.

Hyperbolæ concentricæ per eundem verticem simul adscriptæ, quarum recta latera sint inæqualia, sunt inter se nunquam coeuntes, & semper magis recedentes, & in infinitum productæ, ad interuallum perueniunt maius quolibet dato interuallo, & asymptotos inscriptæ secat Hyperbolen circumscriptam.



Sint duę Hyperbolę ABC, DBE per eundem verticem B simul adscriptę, quarum idem centrum sit F, idemque transuersum BFG, sed tamen Hyperbolæ ABC rectum latus sit BH, maius recto BI Hyperbolæ DBE. Dico primùm eas simul esse non coeuntes.

Cum enim Hyperbolæ DBE, ABC sint per verticem simul adscriptæ cum eodem transuerso BG, ipsa DBE, cuius

a 2. Coroll. 19. h. rectum minus est, inscripta [a] erit Hyperbolæ ABC, cuius rectum maius est, hoc est, si istæ simul in infinitum producantur, erunt simul non coeuntes.

Iam dico, has etiam esse semper inter se recedentes. Ductis enim, & protractis regulis; GH, GI, & applicatis duabus vbicunque rectis ADL, MON; quæ regulas secent in Q, S, T, V,

b 6. Coroll. 19. h. cum sit vt quadratum MN ad quadratũ NO, ita [b] recta VN ad NT, vel recta SL ad SQ, vel quadratum AL ad LD, erit etiam recta MN ad NO, vt AL ad LD, & per conuersionem rationis, & permutando MN ad AL, vt MO ad

c 32. h. AD, sed est MN [c] maior AL, quare, & MO erit maior AD; similiter demonstrabitur quamlibet aliam interceptam applicatę portionem inter Hyperbolas infra MO, maiorem esse ipsa MO, & hoc semper, quare huiusmodi Hyperbolæ sunt semper inter se recedentes. Quod secundò, &c.

Ampliùs dico, has sectiones in infinitum productas, aliquando peruenire, ad interuallum maius quolibet dato interuallo X. Hoc autem, eadem penitùs arte, ac in 33. huius fieri posse demonstrabitur. Quod tertiò, &c.

Tandem sit FP asymptotos inscriptæ DBC, & FR asymptotos circumscri-

d 8. huius. ptę, & contingens HB producatur, vtranque asymptoton secans in P, R: erit ergo quadratum BP ęquale quartę parti figurę GBI, [d] & quadratũ BR quartę parti figuræ GBH, sed rectangulum GBI maius est rectangulo GBH, cum sit BI minor BH, ergo BP minor est BR; hoc est FP asymptoton inscriptæ cadit infra FR asymptoton circumscriptæ diuidens angulũ ab ipsius asymptotis fa-

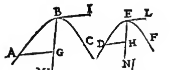
e ibidem. ctum, ex quo ipsa FP producta secabit [e] Hyperbolen circumscriptam ABC. Quod erat vltimò, &c.

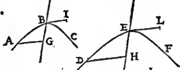
THEO-

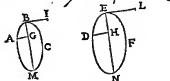
THEOR. XIX. PROP. XXXVIII.

In Parabolis quibuslibet, vel in similibus Hyperbolis, aut similibus Ellipsibus, segmenta diametrorum sectionum lateribus proportionalia, suscipiunt applicatas iisdem lateribus proportionales.

SInt, vt in prima figura, duæ quælibet Parabolæ, vel vt in secunda, duæ similes Hyperbolæ, vel vt in tertia, duæ similes Ellipses ABC, DEF, quarum diametrorum segmenta BG, EH, rectis earum lateribus BI, EL, vel transuersis BM, EN sint proportionalia, dico & applicatas GA, HD ipsis lateribus esse proportionales.







Nam in Parabolis primùm, cum sit rectum BI ad rectum EL, vt segmentum BG ad EH, erit permutando IB ad BG, vt LE ad EH, vnde rectangulum IBG simile erit rectangulo LEH, quare rectangulum IBG ad LEH, erit vt quadratum lateris IB ad quadratum homologi lateris LE, sed rectãgulum IBG a æquatur quadrato GA, & rectãgulum LEH quadrato HD, vnde quadratum GA ad HD, erit vt quadratum IB ad LE, vel applicata GA ad HD, vt rectum IB ad rectum LE. In Hyperbolis autem, & Ellipsibus cum sit vt BI ad EL, vel ob sectionum similitudinem, vt MB ad NE, ita BG ad EH, erit permutando MB ad BG, vt NE ad EH, & in Hyperbolis, componendo, in Ellipsibus autem diuidendo, MG ad GB, vt NH ad HE, quare rectangulum MGB simile erit rectangulo NHE, sed rectangulum MGB ad quadratum GA est, b vt MB ad BI, vel vt NE ad EL, vel vt rectangulum NHE ad quadratum HD. quare permutando rectangulum MGB ad rectangulum NHE, vel (ob ipsorum rectangulorum similitudinem) quadratum BG ad quadratum EH, vel quadratum BI ad quadratum EL, erit vt quadratum GA ad quadratum HD, hoc est rectum BI ad rectum EL, vt applicata GA ad applicatam HD. Quod erat, &c.

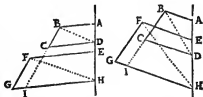
a 1. huius.

b 21. primi conic.

LEMMA IV. PROP. XXXIX.

Si duæ menſales ABCD, EFGH fuerint ſuper eadem linea AH ad eaſdem partes deſcriptæ, ita vt ipſarum baſes AB, DC; EF, HG ſint omnes inter ſe parallelæ, ſintque proportionales lateribus in directum poſitis; nempe ſit vt AB ad EF, ita AD ad EH, & DC ad HG. Dico, & reliqua latera BC, FG eſſe inter ſe parallela.

DVctis enim diagonalibus BD, FH, productaque BC in I. Cum ſit BA ad EF, vt AD ad EH, erit permutando BA ad AD, vt FE ad EH, eſtq; angulus BAD çqualis angulo FEH, ob parallelas BA, FE, quare triangulum BAD ſimile eſt triangulo FEH; ideoq; angulus BDA æqualis angulo FHE, & totus CDA, æquatur toto GHE, ob parallelas CD, GH, vnde reliquus CDB, æquatur reliquo GHF. Item cum ſit CD ad GH, vt DA ad HE, erit permutando CD ad DA, vt GH ad HE, eſtq; DA ad DB, vt HE ad HF, ob triangulorum ADB, EHF ſimilitudinem, quare ex æquali CD ad DB, erit vt GH ad HF, ſuntq; anguli ad D, & H æquales, ergo, & angulus DCB, ſiue HIB, æqualis angulo HGF, ideoque rectæ BC, FG inter ſe æquidiſtant. Quod erat, &c.



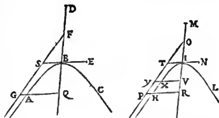
THEOR. XX. PROP. XXXX.

Si à terminis æqualium ſegmentorum ex diametris ſimilium Hyperbolarum abſciſſorum rectæ lineæ ordinatim applicentur, vſque ad ſectionum aſymptotos, erit ſegmentum applicatæ in Hyperbola maiorum laterum, inter ſectionem, & aſymptoton interceptum, maius ſegmento applicatæ, quod in Hyperbola minorum laterum inter ſectionem eiuſque aſymptoton intercipitur.

ESto Hyperbole maiorum laterum ABC, cuius tranſuerſum DB rectum BE, aſymptotos FG, & Hyperbole minorum ſit HIL, cuius tranſuerſum MG, rectum GN, aſymptotos OP, & ipſarum ſectionum diametris, dempta ſint çqualia diametri ſegmenta BQ, IR, è quorũ terminis Q, R applicatę ſint (ad partes æqualium inclinationum) rectæ QAG, RHP vſque ad earum aſymptotos: Dico ſegmentum GA in ſectione maiorum laterum, maius eſſe ſegmento PH in ſectione minorum.

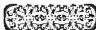
Produ-

F Productis enim contingentibus EB, NI vsque ad asymptotos in S, T, fiat vt DB ad MI, ita BQ ad IV, & per V applicetur VXY: cum sit DB maior MI, erit BQ, & IR maior IV, estque FB maior OI (cum duplum DB sit maior duplo MI) ergo tota FQ erit maior tota OV, & QA ad VX erit a vt DB ad MI, & quoniam QB ad VI, est vt BD ad IM, vel vt dimidium BF ad dimidium IO, erit permutando, componendo, & iterum permutando QF ad VO, vt BF ad IO, vel vt DB ad MI; & cum sit quadratum SB ad TI, vt rectangulũ DBE ad MIN, vtrunque enim est quarta pars suæ figuræ) vel vt quadratum DB ad quadratum MI; ob rectangulorum similitudinem) vel sumptis subquadruplis, vt quadratum FB ad OI, erit quoque linea SB ad TI, vt linea FB ad OI, & permutando SB ad BF, vt TI ad IO, sed anguli SBF, TIO sunt æquales per sextam secundarum definitionum, & per constructionem, quare triangula SBF, TIO erunt similia, vti etiam triangula GQF, YVO, obidque homologa eorum latera proportionalia erunt, hoc est GQ ad YV, vt FQ ad OV, sed est FQ maior OV, ergo, & GQ erit maior YV, sed FQ ad OV, est vt DB ad MI, item AQ ad XV, vt DB ad MI, vt supra ostendimus, quare GQ ad YV erit vt AQ ad XV, & permutando, & per conuersionem rationis, & iterum permutando GQ ad YV, vt GA ad YX, sed est GQ maior YV, ergo, & GA maior YX, est autem YX maior PH, ergo eò magis GA erit maior PH. Quod erat demonstrandum. a 38. h.



COROLL.

Ex hac patet, in similibus Hyperbolis asymptotos ad partes æqualium inclinationum ductas, æquales angulos cum diametris efficere, ac ideo angulos ab asymptotis factos esse inter se æquales. Cum enim demonstrata sint triangula SFB, TOI similia, erunt anguli ad F, O, æquales; eademque ratione æquales etiam anguli ab alijs asymptotis cum diametris ad alteram partem constituti; vnde eorum aggregata, nempe anguli ab asymptotis facti in similibus Hyperbolis inter se æquales erunt.



THEO-

THEOR. XXI. PROP. XXXXI.

Similes Hyperbolæ per eundem verticem simul adscriptæ, sunt inter se nunquam coeuntes, & semper magis recedentes, sed ad interuallum nunquam perueniunt æquale cuidam dato interuallo.

Sint duæ similes Hyperbolæ ABC, DBE per eundem verticem B simul adscriptæ, & Hyperbolæ ABC maiora sint latera, transuersum nempe FB, rectũ autem BG; & DBE minora sint, transuersum HB, rectum verò BI. Patet primùm has sectiones esse inter se nunquam coeuntes; cum enim DBE alteri [a] ABC sit inscripta, ipsæ, licet in infinitum producantur, nunquam conuenient.

a 5. Coroll. 19. h.

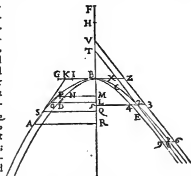
Dico ampliùs, easdem inter se longiùs semper recedere. Applicatis enim in altera sectionum, nempe in inscripta, duabus vbicunque rectis MN, LD, fiat vt BH ad BF, ita BM ad BQ, & BL ad BR, & per Q, R, applicentur in circumscripta Hyperbola rectæ QS, RA; & cum diametrorum segmẽta BM, BQ, BL, BR sint transuersis BH, BF proportionalia, [b] erunt quoque applicatæ MN, QS; LD, RA ijsdẽ lateribus proportionales, quare MN ad QS erit vt LD ad RA; cumque sit vt tota BL ad totam BR, ita pars BM ad partem BQ, erit & reliqua ML ad reliquam QR, vt tota BL ad totam BR, vel vt BH ad BF, vel vt MN ad QS, & vt LD ad RA, vt nuper ostendimus; quare iunctis rectis DN, AS in mensalibus DM, AQ, [c] erunt ipsæ DN, AS inter se parallelæ. Iam productis MN, LD vsque ad circumscriptam sectionem ABC, in P, & O, si iungatur PO, hæc omninò secabit iunctam AS, vel intra ipsam sectionem; (si nempe vnius iunctarum sectioni occursus, alterius occursibus contineatur) vel extra [d] (si nullius occursus, alterius occursibus amplectatur) sed AS producta ad partes verticis tota cadit [e] extra sectionem in SK, & punctum P est in ipsa sectione, quare punctum P est inter parallelas lineas ASK, DN, sed producta PO conuenit cum altera parallelarum AS, vt modò monitum fuit; talisq; occursus est omnino ad partes O infra applicatam PN, cum punctum S cadat infra P (nam ex ipsa constructione applicata QS est infra applicatam MP) quare eadem OP producta conueniet quoque cum altera æquidistantium DN, ad oppositas tamen partes, vtputa supra ipsam applicatam PN, vnde intercepta applicata OD, maior erit intercepta PN vertici B propinquiori,

b 38. h.

c 39. h.

d 25. secundi conic.

e 10. primi conic.



quiori,

quiori, & hoc ſemper, &c. Quapropter huiuſmodi Hyperbolæ ſunt ſemper ſimul recedentes. Quod ſecundò, &c.

Præterea ſit TX aſymptotos inſcriptæ DBE, & VZ aſymptotos circumſcriptæ, quæ contingentem GB productam ſecent in X, Z; & cum huiuſmodi Hyperbolę ſint ſimiles, ſintque earum aſymptoti VZ, TX ad partes ęqualium inclinationum ductæ, erit angulus ZVB [a] æqualis angulo XTB, quare TX æquidiſtat VZ, ſed eſt VZ. Aſymptotos circumſcriptæ, vnde TX producta [b] ſecabit circumſcriptam Hyperbolen ABC; ſecet ergo eam in 2, & per 2 applicetur 3 2 4 5 alteram aſymptoton inſcriptam ſectionem, ac diametrum ſecans in 3, 4, 5: dico huiuſmodi Hyperbolas, licet ſemper inter ſe magis recedant, nunquam tamen ad interuallum peruenire æquale interuallo 3 2, quod inter æquidiſtantes aſymptotos intercedit, & iuxta ordinatim ductas metitur. [a Coroll. 40. h.] [b 11. h.]

Nam cum in ſimilibus Hyperbolis ABC, DBE, ex æqualibus, immo ex eodem diametri ſegmento B 5, ducta ſit quædam applicata 5 4 2 3 ſimilimium Hyperbolarum aſymptotos ſecans in 2, 3; erit [c] intercepta huius applicatæ portio 3 2 in Hyperbola maiorum laterum, maior intercepta portione 2 4, in Hyperbola minorum. Ampliùs applicata infra 3 2 4 5, qualibet alia 6 7 8 9; erit ob eandem rationem, & portio 6 7 maior portione 8 9, quare addita communi 7 8; erit 6 8 ſiue 3 2 maior 7 9, & hoc ſemper, vbicunque ſit intercepta 8 9 infra 2 4 licet ipſæ interceptæ continuè augeantur. Vnde ſimiles Hyperbolæ per eundem verticem ſimul adſcriptę, quamuis ſint ſemper magis recedentes, ad interuallum, tamen non perueniunt æquale cuidam dato interuallo. Quod erat vltimò, &c. [c 40. h.]

COROLL.

Hinc eſt, quod ſimiles Hyperbolæ per eundem verticem ſimul adſcriptę habent aſymptotos parallelas, & aſymptotos inſcriptæ ſecat Hyperbolen circumſcriptam: nam vltimò loco oſtẽdimus TX ęquidiſtare ipſi VZ, & ſecare inſcriptam in 2.

THEOR. XXII. PROP. XXXXII.

Parabolæ congruentes, per diuerſos vertices ſimul adſcriptæ, ſunt inter ſe nunquam coeuntes, & in infinitum productæ ad ſe propius accedunt, & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo.

Sint duæ congruentes Parabolæ ABC, DEF per diuerſos vertices B, E, ſimul adſcriptæ, quarum recta latera ſint BG, EH (quæ inter ſe æqualia [a] erunt, cum ſectiones ponantur congruentes.) Dico primùm has in infinitum productas nunquam inter ſe conuenire. [a 1. Coroll. 19. h.]

Nam producta contingente HE ſectioni ABC occurrente in A, & C, hæc erit quoque ordinatim ducta in ſectione ABC (cum ſint ſectiones ſimul adſcriptæ) & Parabole DEF tota cadet infra contingentem AEC, ſumptoque in ipſa

in ipsa DEF, quocunque puncto D, per ipsum ordinatim applicetur ODS, alteram sectionem secans in S: erit quadratum SO [a] æquale rectãgulo OBG, & quadratum DO rectangulo OEH, sed rectangulum OBG maius est rectãgulo OEH, cum latitudo BG æqualis sit EH, altitudo verò BO maior EO, quare SO quadratum, maius est quadrato DO; vnde punctum D cadit intra Parabolen BA, & sic de quibuslibet alijs pũctis Parabolæ DEF; ergo huiusmodi sectiones inter se nunquam conueniunt. Quod primò, &c.

[a] 1. huius.

Has tamen dico, licet in infinitum productas, infra contingentem EA ad se propiùs accedere: Ducta enim DM parallela ad ON, & per M applicata MN, fiet parallelogrammum DN, cuius opposita latera MN, DO æqualia erunt. Iam quadratum MN, [b] siue rectangulum NBG æquatur quadrato DO, [c] siue rectangulo OEH, sed horum latera BG, EH æqualia sunt, quare & latera BN, EO æqualia erunt: itaque per prostapheresim, erit BE æqualis NO, sed est quoque MD æqualis eidem NO, igitur BE, & MD inter se sunt

[b] ibidem.

[c] ibidem.

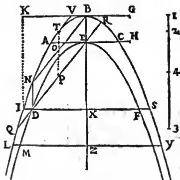
æquales, at sunt quoque parallelæ, igitur coniunctæ BM, & ED æquales erunt, & parallelæ, sed BM secat NM, quare producta secabit quoque alteram parallelarum OD, sed extra sectionem BMA (cum sit BM intra sectionem, producta verò, tota cadat extra) fit ergo occursus cum ODS in P, & cum contingente EA in T; & in secunda figura, in qua contingens EA cadit inter applicatas MN, OS, iungatur SM secans EA in V.

Iam in prima figura, cum in parallelogrammo PE latera ET, DP, sint æqualia, sitque EA maius ET, erit EA quoque maius DP, estque DP maius intercepto segmento DS, quare AE, eò maius erit ipso DS. In secunda autem figura, cum pariter ET, DP sint æquales, sitque ablata TV minor ablata PS, erit reliqua EV maior reliqua DS, & eò magis EA maior eadem DS. Non absimili modò ostendetur quamcunque interceptam XY infra SD, minorem esse ipsa SD; ducta enim YZ æquidistanter EB, demonstrabitur item YZ æqualis eidem BE, ideoque YZ, & DM inter se æquales erunt, & parallelæ,

rallelæ, ex quò si iungatur MZ, & DY, ipsæ æquales, & parallelæ erunt, & facta constructione vt supra, idem omninò demonstrabitur, nempe interceptam YX minorem adhuc esse ipsa DS. Huiusmodi igitur Parabolæ congruentes, quò magis à tangente EA remouentur ad se propiùs accedunt: quod secundò, &c.

ALITER.

SEd hoc idem aliter in nouo hoc schemate, in quo item ostendetur interceptam contingentem EA maiorem esse intercepta applicata DI, & DI maiorem infra intercepta ML, & hoc semper, si sectiones in infinitum producantur. Ducta enim DN parallela ad EB, eadem penitus methodo, qua superiùs vsi sumus, demonstrabimus DN ipsi EB æqualem esse, & parallelam, quare, & coniunctæ BN, ED æquales erunt, ac parallelæ: si ergo BN secetur bifariam in O, ducaturque POT diametro BE æquidistans, patet ipsam TOP esse [a] vtriusque Parabolæ diametrum, & BN esse vnam ei applicatarum in Parabola ABC, vti etiam QDER ipsi NB æquidistantem: quapropter QP, & PR æquales erunt, sed est DP æqualis PE (ob parallelas, & quia NO æquatur OB) quare reliquæ QD, ER æquales erunt, ideoque rectangulum QDR æquabitur rectangulo QER. Ampliùs ducatur TV æquidistans ad QR, vel ad NB: patet TV sectionem [b] contingere in T, & contingenti GB occurrere in V, (nam hæc, cum secet in B alteram parallelarum BN, secat quoque reliquam TV.) Cumque duæ rectæ TV, BV, sectionem ABC contingentes, in vnum conueniant, sitque QR ipsi TV, atque IS, & AC ipsi BV æquidistantes, ac se mutuò secantes in D, & E, erit rectangulum QDR ad IDS, [c] vt quadratum TV ad BV quadratum, itemque rectangulum QER ad AEC, [d] vt idem quadratum TV ad BV, quare vt rectãgulum QDR ad IDS, ita rectangulum QER ad AEC, & permutando rectangulum QDR ad QER, vt rectangulum IDS ad AEC, sed QDR, QER sunt çqualia, vt modò ostendimus, ergo & rectangulum IDS æquatur rectangulo AEC, siue quadrato AE, quare vt SD ad EA, ita EA ad DI, sed SD maior est EA, cum [e] sit SX maior CE siue EA, vnde AE quoque, maior erit DI. Eadem ratione ostendetur rectangulum LMX æquale quadrato AE: vnde rectangula IDS, LMY inter se æqualia erunt, sed est latus MY maius latere DS, cum eius segmentum ZY [f] maius sit huius segmento XS, & reliquum segmentum MZ maius reliquo segmento DX, quare latus LM minus erit latere ID, & semper, quò



[a] 46. primi conic.

[b] 32. primi conic.

[c] 17. tertij conic.

[d] ibidem.

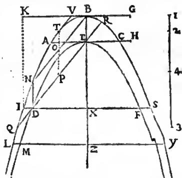
[e] 32. h.

[f] ibidem.

K inter-

interceptæ applicatarum portiones à contingente AE magis remouentur eò sunt minores, vnde tales sectiones ad se propiùs accedunt. Sed quod de congruentibus, siue æqualibus parabolis hactenus exposuimus, & iam olim demonstrauimus (dum Asymptoton doctrina promoueri posse animaduertimus) maximos postea Geometras, Torricellium nempe, ac Gregorium à S. Vincentio aliter quoque ostendisse reperimus, quorum edita opera ad vberiorem de hac re eruditionem consulere suademus.

Dico tandem has congruentes Parabolas ad interuallum simul peruenire minus quocunque dato interuallo 1 2. Fiat enim vt 1 2 ad AE, ita AE ad 2 3 quæ ipsi 1 2 indirectum ponatur, & tota 1 3 bifariam secetur in 4, & per B applicetur BK çqualis 1 4; agaturque KI parallela ad BX, & per I recta IDS contingēti BK æquidistans, erit ergo IX æqualis KB, siue 4 1; estque IX dimidium IS, & 4 1 dimidium 1 3; quare IS, 1 3 sunt æquales; sed factum est rectangulum 1 2 3 æquale quadrato AE, & rectangulum IDS ostensum est æquale eidem quadrato AE, ergo rectangula IDS, 1 2 3 inter se sunt æqualia; sed rectæ IS, 1 3, sunt æquales, quare segmentum ID æquatur dato interuallo 1 2; interceptæ verò infra ID sunt minores ipsa intercepta ID, quapropter huiusmodi congruentes Parabolę ad interuallum perueniunt minus dato interuallo 1 2. Quod erat vltimò demonstrandum.



COROLL. I.

Ex hac patet, in congruentibus Parabolis per diuersos vertices simul adscriptis, omnes, inter eas, interceptas lineas communi diametro ęquidistanter ductas, esse inter se æquales, quales sunt EB, DN, &c.

COROLL. II.

Patet quoque, ex penultima parte huius, rectangula segmentorum applicatarum vtranque Parabolen secantium omnia inter se æqualia esse, qualia sunt rectangula LMY, IDS, &c.



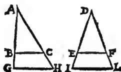
LEM-

LEMMA V. PROP. XXXXIII.

Si duo triangula ABC, DEF, habuerint circa angulos B, E, latera AB, DE, item altera BC, EF inter se æqualia, & in angulis BAC, EDF applicatæ sint GH, IL parallelæ ad BC, EF, sitque rectangulum BGH æquale rectangulo EIL. Dico latera BG, EI inter se æqualia esse.

Sed consultò omissa, præter mei instituti morem, affirmatiua demonstratione, libet potius indirectam, ac breuiorem afferre, simulque egregiæ indolis specimen exhibere nobilissimi, ac ingeniosissimi Romani Adolescentis, Bruti Annibalis della Molara, ex selectissimis Ephebis SERENISSIMO MAGNO DVCI ministrantibus, de quo non ausim asserere, quæ sint ei maioris oblectamenti, an equestrium exercitationum ornamenta, quibus elegantissimè insignitur, an mathematicæ contemplationes, dum, etiam inter Aulæ strepitus, pacatos subtilioris Geometriæ nouit inuenire recessus, prout varia testantur problemata, ac theoremata, à me identidem ei proposita, & ab ipso quàm feliciter soluta, quorum, licet facillimum, posteriori tamen inseruiens hic habes.

Esto, si fieri potest, alterum ipsorum laterum, quale est BG, maius altero EI: habebit ergo GB ad BA, maiorem rationem quam IE ad ED ipsi BA æqualem, & componendo GA ad AB maiorem rationem quàm ID ad DE, sed GA ad AB, est vt GH ad BC, & ID ad DE, vt IL ad EF; ergo GH ad BC habet maiorem rationem quàm IL ad EF, hoc est ad sibi æqualem BC, quare GH erit maior IL, & ponitur BG maior EI, vnde rectangulum BGH maius est rectangulo EIL: quod est contra hypotesim. Sunt ergo BG, EI inter se æquales. Quod erat, &c.



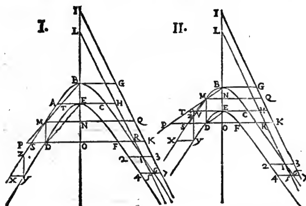


THEOR. XXIII. PROP. XXXXIV.

Hyperbolæ congruentes, per diuersos vertices simul adscriptæ, sunt inter se nunquam coeuntes, & semper simul accedentes: sed ad interuallum nunquam perueniunt æquale cuidam dato interuallo.

Sint duæ congruentes Hyperbolæ ABC, DEF per diuersos vertices B, E simul adscriptæ, quarum recta latera sint BG, EH (quæ inter se æqualia erunt) & ipsarum transuersa sint BI, EL (quæ item æqualia erunt a cum sectiones ponantur congruentes.) Dico primùm has sectiones nunquam inter se conuenire.

a 1. Coroll. 19. h.



Nam producta contingente HE donec sectioni ABC occurrat in A, & C, ipsa quoque erit ordinata in sectione ABC (cum sint sectiones simul adscriptæ) & sectio DEF tota cadet infra contingentem AEC; sumptoque in ipsa ED quocunque puncto D, applicetur SDO, quæ iunctis regulis IG, LH occurrat in K, R; & cum sit triangulum IBG simile triangulo LEH (habent enim circa æquales angulos B, E, æqualia latera, vtrunque vtrique) erit angulus BIG æqualis angulo ELH, vnde regulæ IGK, LHR æquidistant, ideoque IK cadit extra LR, cum sit punctum I supra L, ergo OK maior est OR, sed est OB maior OE, igitur rectangulum BOK b siue quadratum SO, maius est rectangulo, EOR c siue quadrato DO; hoc est punctum D cadit intra sectionem ED, & sic de quocunque alio puncto eiusdem sectionis infra contingentem EA: quapropter huiusmodi Hyperbolæ inter se nunquam conueniunt. Quod primò, &c. Am-

b Coroll. 1. huius.
c ibidem.

Ampliùs dico ipſam DEF quò longiùs aberit à vertice E infra EA, eò magis appropinquarè ſectioni B A M. Quoniam ducta D M parallela ad OEB, & MN ad DO, fiet parallelogrammum DN, cuius oppoſita latera MN, DO æqualia erunt: Itaque regulæ IG occurrat producta MN in Q, & regulæ LH producta DO in R: cum ſit oſtenſa MN æqualis DO, erit quadratum MN [a] ſiue rectangulum BNQ, æquale quadrato DO [b] ſiue rectangulo EOR: ſed in triangulis IBG, LEH ſunt latera IB, LE, & BG, EH inter ſe æqualia, alterum alteri, quapropter æqualium rectangulorum BNQ, EOR latera BN, & EO [c] æqualia erunt: quare cum diametri ſegmenta BN, EO ſint æqualia, facta proſtaphereſi, proueniet BE æqualis NO, ſed eſt quoque MD æqualis NO in parallelogrammo DN, igitur rectæ BE, & MD inter ſe ſunt æquales, at ſunt etiam parallelæ, ergo coniuncta BM iunctæ ED æquidiſtat, ſed BM ſecat NM, quare producta ſecabit quoque OD, ſed extra ſectionem BMA (cum BM ſit intra ſectionem, producta verò tota cadat extra) ſitque occurſus in P, & OD occurrat ſectioni BMA in S, PM verò contingentem EA ſecet in T; & in ſecunda figura, in qua punctum A cadit inter puncta S, & M, iungatur SM, quæ cum tota cadat intra ſectionem, neceſſariò ſecabit applicatam AE: veluti in V.

a Coroll. 1. huius. *b* ibidem. *c* 43. h.

Iam, in prima figura, cum in parallelogrammo P E oppoſita latera ET, DP ſint æqualia, ſitque EA maius ET, erit EA quoque maius ipſo DP, ſed eſt DP maius intercepto applicatæ ſegmento DS, erit ergo AE, eò maius ipſo DS. In ſecunda autem figura cum pariter ET, DP ſint æquales, ſitque dempta TV minor dempta PS, erit reliqua EV maior reliqua DS, & eò magis EA maior eadem DS. Eodē penitùs modo oſtendetur, quamlibet aliam interceptam ZY infra SD minorem eſſe ipſa SD: nam ducta YZ æquidiſtanter ad EB, demonſtrabitur item YZ æqualem eſſe eidem BE, ac ideo YZ, & DM eſſe inter ſe æquales, & parallelas: ex quo ſi iungantur MZ, & DY, ipſę æquales erunt, & parallelæ; completa igitur conſimili conſtructione, ac ſupra, idem omnino inſequetur, hoc eſt interceptam YX minorem adhuc eſſe DS: tales ergo interceptæ quò magis à tangente EA remouentur continuè decreſcunt. Quare ſectiones ABC, DEF ſunt ſemper ſimul accedentes. Quod ſecundò, &c.

Præterea, ſi ad euitandam in hiſce figuris linearum implicationem, concipiatur circumſcriptæ Hyperbolæ ABC centrum eſſe I, aſymptoton IG, & contingens ex vertice BG; at inſcriptæ DEF centrum L, aſymptoton LH, contingens autem ex vertice ſit EH: cum harum ſectionum latera ſint data, æqualia, erunt quoque ipſorum rectangula inter ſe æqualia, ideoque, & eorum ſubquadrupla [d] hoc eſt quadrata contingentium BG, EH; vnde ipſæ lineæ BG, EH æquales erunt, ſed eſt etiam BI æqualis EL (nam vtra eſt dimidium æqualium verſorum laterum) quare in triangulis IBG, LEH, cum ſint latera IB, BG, lateribus LE, EH æqualia, & anguli ad B, E æquales, etiam anguli ad baſes I, L æquales erunt, vnde aſymptoti IG, LG inter ſe æquidiſtant; & cum ſit à puncto L, quod eſt intra angulum ab Aſymptotis circumſcriptæ ſectionis factū, ducta LH alteri aſymptoto IK æquidiſtans, producta [e] ſecabit omnino Hyperbolen ABC: quare LH aſymptotos inſcriptæ ſecat Hyperbolen circumſcriptam; ſecet ergo in 1, per quod applicetur 2 1 3: Dico harum ſectionum interuallum infra applicatam 2 1 3 per intercepta

d 1 ſecū. di conic. *e* 11. h.

tercepta applicatarum segmenta metitum, licet semper magis, ac magis decrescat, esse tamen non minus interuallo 1 3, quod iuxta easdem æquidistantes ordinatim sectionibus applicatas, inter vtranque asymptoton cadit. Nam per ea, quæ infra demonstrabimus, interuallum 2 1, maius est interuallo 1 3. Pariter 4 5, est maius 6 7, communique addito 5 6, erit interuallum 4 6, maius interuallo 5 7, siue 1 3, & hoc semper vbicunque sumatur harum sectionum interuallum infra applicatam 2 1 3. Quare hyperbolæ congruentes per diuersos vertices simul adscriptæ, licèt semper magis accedentes, ad interuallum nunquam perueniunt æquale cuidam dato interuallo. Quod erat vltimò, &c.

COROLL.

EX his constat, congruentium Hyperbolarum non per eundem verticem simul adscriptarum asymptotos esse inter se æquidistantes, & asymptoton inscriptæ secare Hyperbolen circumscriptam.

Quod superiùs promisimus ostendetur sic.

SInt duæ congruentes Hyperbolæ KBC, DEF, per diuersos vertic es B, E simul adscriptæ, & circumscriptæ KBC sit centrum G, & asymptotos GI, inscriptæ verò sit centrum H, & asymptotos HM, quæ ipsi GI æquidistabit, per præcedens Coroll. sitque applicata quæcunque IL vtranque asymptoton, & Hyperbolen secans in I, A, K, D, communemque diametrum in L: dico interceptum applicatę segmentum AD inscriptæ Hyperbolę DEF, maius esse intercepto eiusdem applicatæ segmento IK inter asymptoton, & circumscriptam.

Ducta enim IM parallela ad GHO, & per M applicata MNO, erunt IH, IO parallelogramma, ac ideò tàm GH, quàm LO ipsi IM æquales erunt, & inter se; quare addita communi HL, erit GL æqualis HO, sed est GB æqualis HE, (cum sint semi-transuersa latera congruentium Hyperbolarum) vnde reliqua BL, reliquæ EO æqualis erit, & ob id semi-applicata LK semi-applicatę ON ęqualis, sed est tota LI æqualis totæ OM (cum sint oppositæ in parallelogrammo IO) ergo reliquæ KI, NM æquales erunt, sed est ᵃ DA maior NM, quare & eadem DA erit maior KI. Quod erat, &c.

ᵃ 19. h.

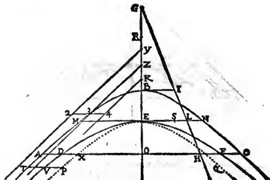
G H B E L O I A K D C F M N

THEO-

THEOR. XXIV. PROP. XXXXV.

Similes Hyperbolæ per diuersos vertices simul adscriptæ, & quarum eadem sit regula, sunt inter se nunquam coeuntes, & in infinitum productæ ad se propiùs accedentes, sed ad interuallum nunquam perueniunt æquale cuidam dato interuallo.

SInt duæ Hyperbolæ ABC, DEF per diuersos vertices B, E simul adscriptæ, quarum eadem sit regula GH (sic enim similes erunt, quoniam[a] ductis contingentibus BI, EL; est transuersum GB ad rectum BI, vt transuersum GE ad rectum EL.) Dico primùm, has in infinitum productas, nunquam simul conuenire. [a] 6. secūd. defin.

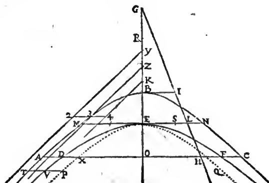


Protracta enim contingente LE; sectionem ABC secans in M, N, quæ erit ipsi ordinata, cum sectiones ponantur simul adscriptæ; patet sectionem DEF totam cadere infra contingentem MN. Iam sumpto in sectione DEF quolibet puncto D, per ipsum ordinatim applicetur ADOH alteram sectionem secans in A, regulam verò in H: erit quadratum AO, ad quadratum DO, vt rectangulum BOH ad rectangulum EOH (ob[b] æqualitatem) vel vt altitudo BO ad altitudinem EO, sed est BO maior EO, quare quadratum AO maius erit quadrato DO, ex quo punctum D cadit intra Hyperbolen ABC; & sic de quibuscunque alijs punctis Hyperbolę DEF: quare huiusmodi sectiones inter se nunquam conueniunt. Quod primò, &c. [b] Coroll. 1. huius.

Iam si datæ Hyperbolæ, per verticem E, adscribatur Hyperbole PEQ cuius latera ER, ES æqualia sint lateribus BG, BI, vtrunque vtrique, ipsæ Hyperbolæ ABC, PEQ, congruentes[c] erunt, eritque, (ob æqualitatem) RE ad ES, vt GB ad BI, vel vt GE ad EL, quare Hyperbolæ DEF, PEQ [c] 1. Coroll. 19. h.

erunt

erunt similes, at sunt per verticem E simul adscriptæ, vnde PEQ minorum
a 5. Coroll. 19. h. laterum inscripta a erit Hyperbolæ DEF maiorum laterum: & infra ADX applicata quacunque TVP; cum Hyperbolæ ABC, PEQ sint congruentes,
b 44. h. & per diuersos vertices simul adscriptæ b erit intercepta AX maior intercepta TP: cumque Hyperbolæ DEF, PEQ sint similes, ac per eundem verticem simul adscriptæ
c 41. h. c erit intercepta DX minor intercepta VP, vnde reliqua intercepta AD omnino erit maior reliqua intercepta TV; & hoc semper: quare huiusmodi Hyperbolæ ABC, DEF sunt ad se propiùs accedentes, Quod erat secundò, &c.



Tandem, bifariam sectis transuersis lateribus GB, GE, RE, in Y, Z, K, erit Y centrum Hyperbolæ ABC, Z verò centrum DEF, ac demum K centrum PEQ: & cum sit GB minor GE, erit dimidium GY minus dimidio GZ; quare punctũ Z cadit infra Y: cumq; sit EG maior ER, erit dimidiũ EZ maius dimidio EK, vnde K punctum cadit infra Z. Si ergo ex Hyperbolarum cen-
d Coroll. 41. huius. tris Y, Z, ducantur earum asymptoti Y 2, Z 3, K 4, d erit Z 3, parallela ad
e Coroll. 44. h. K 4, & Y 2 e æquidistabit eidem K 4; quare asymptoti omnes Y 2, Z 3, K 4, erunt inter se parallelæ; & cum Y 2 sit asymptotos ABC, & Z 3 sit intra an-
f Coroll. 11. h. gulum ab asymptotis comprehensum, ipsa sectionem ABC f secabit, vt in 3, per quod ordinatim ducta recta 2 3 4, alias asymptotos secane in 2, 4, infra ipsam applicetur quælibet alia TVP, singulas Hyperbolas secans in T, V, P.
g 44. h. Erit intercepta TP g maior semper interuallo 2 4, sed ablata intercepta VP
h 41. h. est semper h minor ablato interuallo 3 4, vnde reliqua intercepta TV inter datas sectiones ABC, DEF, erit omnino maior reliquo interuallo 2 3, quod inter datarum sectionum parallelas asymptotos est interceptum, ac iuxta ordinatim ductis æquidistantes metitur. Quod erat vltimò demonstrandum.

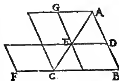
CO-

COROLL.

EX his patet, similium Hyperbolarum per diuersos vertices simul adscriptarum, & quarum eadem sit regula, asymptotos esse inter se parallelas, & asymptoton inscriptæ secare Hyperbolen circumscriptam.

LEMMA VI. PROP. XXXXVI.

Si in quocunque triangulo ABC ducta sit quæpiam linea DE basi BC parallela, rectangulum ABC superabit ADE rectangulo sub DB, differentia altitudinum, & sub aggregato basium BC, DE.



PRoducta enim BC, ac sumpta CF æquali ipsi DE, & completis in angulo ABC parallelogrammis AE, AC, DF. Constat parallelogrammum AC superare parallelogrammum AE gnomone DCG, sed gnomon DCG æquatur parallelogrāmis BE, GC, & GC æquatur DC, siue EF, quare AC superat AE parallelogrammo DF, hoc est rectangulum ABC superat rectangulum ADE, rectangulo DBF; sed DB est differentia altitudinum, & BF aggregatum basium BC, DE. Quare patet propositum.

THEOR. XXV. PROP. XXXXVII.

Similes Hyperbolæ concentricæ per diuersos vertices simul adscriptæ, sunt inter se nunquam coeuntes, ac semper propiùs accedentes, & ad interuallum perueniunt minus quocunque dato interuallo.

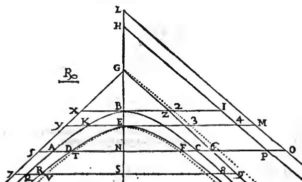
SInt duæ similes Hyperbolæ ABC, DEF per diuersos vertices B, E simul adscriptæ, quarum commune centrum sit G, sitque Hyperbolæ ABC transuersum latus BH, rectum BI, Hyperbolæ autem DEF sit transuersum EL, rectum EM. Dico primùm has, in infinitùm productas, nunquam inter se conuenire.

Producta enim contingente ME, donec vtrinque sectioni ABC occurrat, ipsa erit ordinata in sectione ABC (cum sint sectiones simul adscriptæ) ac sectio DEF cadet tota infra contingentem KEM; & sumpto in DEC quolibet puncto D, applicataque per D recta ADN, quæ iunctis regulis HI, LM

occurrat in P, O; quoniam datæ ſectiones ſunt ſimiles, erit HB ad BI, vt LE ad EM, ſuntque anguli ad B, E æquales, (cum ſectiones ſint ſimul adſcriptæ) quare triangula HBI, LEM æquiangula erunt, ideoque regula HIP æquidiſtabit regulæ LMO; & triangula LNO, HNP inter ſe ſimilia.

Iam cum ſit GE æqualis ipſi GL, & ablata GB æqualis ablatæ GH, erit reliqua BE, reliquæ HL æqualis, ſed eſt EN minor HN, quare BE ad EN maiorem habet rationem, quàm LH ad HN, & componendo BN ad NE, maiorem item rationem quàm LN ad NH, vel quàm ON ad NP, ergo rectangulum ſub extremis BN, NP, ſiue [a] quadratum applicatæ AN, maius erit [b] rectangulo ſub medijs EN, NO, ſiue [c] quadrato applicatę DN, hoc eſt ipſa AN maior DN, ac propterea punctum D cadit intra Hyperbolen ABC, idemque de quolibet alio puncto ſectionis DEF: vnde ipſa DEF inſcripta erit ipſi ABC, vel erunt nunquam ſimul coeuntes. Quod erat primò, &c.

a Coroll. 1. huius. b 17. ſept. Pappi. c Coroll. 1. huius.



Ampliùs applicata infra ADT qualibet alia QRS, & Hyperbolę DEF per eundem verticem E adſcripta Hyperbola ETV, quæ ſit æqualium laterum, ſiue congruens Hyperbolæ ABC, applicatas ſecans in T, V: cum duæ Hyperbolæ EDR, ETV, ſint ſimiles, & per eundem verticem ſimul adſcriptæ; erit ETV, cuius latera æqualia ſunt ipſis lateribus HB, BI, inſcripta [d] ſectioni EDR, cuius maiora ſunt latera LE, EM: ſed erunt [e] ſimul ſemper recedentes; quare intercepta DT minor erit intercepta RV, eſt autem tota AT [f] maior tota QV; quapropter reliqua AD erit omnino maior reliqua QR; & hoc ſemper: Vnde ſimiles concentricæ Hyperbolæ per diuerſos vertices ſimul adſcriptæ, ſunt ad ſe propiùs accedentes. Quod ſecundò erat, &c.

d 5. Coroll. 19. h. e 41. h. f 44. h.



ALITER.

DVcantur ex communi centro G aſymptoti GX, GZ ſectionis ABC, quę alterius ſimilis, & concentricæ ſectionis DEF [a] erunt quoque aſymptoti, & ipſi GX, productæ contingentes IB, ME, occurrant in X, Y, & per G ſit G 2, regulis HI, LM parallela, recta latera ſecans in 2, & 3; cum ſit GE æqualis GL, & GB æqualis GH, erit E 3 æqualis 3 M, & B 2 æqualis 2 I, ſiue 3 4, quare E 4 eſt aggregatum E 3 cum B 2. Iam cum rectangulum GE 3 ſit quarta pars rectanguli LEM, & quadratum EY eiuſdem rectanguli [b] ſubquadruplum, ergo quadratum EY ęquatur rectangulo GE 3: eademque ratione eſt quadratum BX æquale rectangulo GB 2, ſed rectangulum GE 3 excedit rectangulum GB 2 rectangulo BE 4, ſiue [c] quadrato KE, quare quadratum EY ſuperat quadratum BX quadrato EK: ſed productis applicatis AN, QS vſque ad communes aſymptotos, ipſas, ac ſectiones ſecantibus in 5 ADFC 6, & in 7 QR 8 9, eſt quadratum EY æquale [d] rectangulo 5 D 6, & quadratum BX ęquale rectangulo 5 A 6; vnde quadratorum exceſſus æquatur exceſſui rectãgulorum, ſed exceſſus quadratorum eſt quadratum EK, & exceſſus rectangulorum 5 D 6, 5 A 6 [e] eſt rectangulum ADC; vnde quadratum EK æquatur rectangulo ADC; eademque ratione oſtendetur idem quadratum EK æquale rectangulo QR 8, quare rectangula ADC, QR 8 inter ſe ſunt æqualia, ideoque R 8 ad DC, vt DA ad QR, ſed eſt R 8 maior DC (cum ſit RS maior DN, & S 8 maior NC) ergo AD erit maior QR, & hoc ſemper, &c. Quod iterum erat ſecundò demonſtrandum.

[a] Coroll. 40. huius.
[b] 58. huius.
[c] Coroll. 1. huius.
[d] ibidem.
[e] 179. ſept. Pappi.

Dico tandem has ſimiles concentricas Hyperbolas in infinitum productas ad interuallum peruenire minus quolibet dato interuallo ℞. Nam facta eadem penitus conſtructione, ac in vltima parte 42. huius, hoc quod exponitur, non abſimili eiuſdem argumento demonſtrabitur. Quod vltimò, &c.

COROLL. I.

EX hac elicitur ſimilium, & concentricarum Hyperbolarum, per diuerſos vertices ſimul adſcriptarum, Aſymptotós communes eſſe.

COROLL. II.

COnſtat etiam ex penultima parte huius, in prædictis Hyperbolis rectangula ſegmentorum applicatarum vtranque Hyperbolen ſecantium, qualia ſunt rectangula ADC, QR8, omnia inter ſe æqualia eſſe.

Quod in prima parte præcedentium 44. 45. 47. earumque primis Corollarijs oſtendimus, vniuerſaliùs ſequenti Theoremate demonſtrabitur.

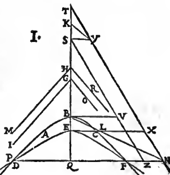
THEOR. XXVI. PROP. XXXXVIII.

Similes Hyperbolæ per diuersos vertices simul adscriptæ habent asymptotos parallelas, & quando centrum interioris cadat vltra centrum exterioris, tunc huius asymptotos interiorem Hyperbolen secabit, ac ipsæ Hyperbolæ necessariò se mutuò secabunt. Cum verò centrum interioris idem sit cum centro exterioris, tunc vnius asymptotos erit asymptotos alterius; & sectiones erunt simul nunquam coeuntes. Et si interioris centrum cadat infra centrum exterioris, tunc eædem sectiones erunt inter se nunquam coeuntes; & asymptotos inscriptæ secabit Hyperbolen circumscriptam.

Sint, vt in vtraque figura huius propositionis, duæ similes Hyperbolæ ABC, DEF per diuersos vertices B, E simul adscriptæ, quarum centra sint G, H, & sectionis ABC asymptoti sint GI, GO; sectionis verò DEF sint HM, HR; Dico has asymptotos esse inter se æquidistantes.

Nam in similibus Hyperbolis ABC, DEF, anguli IGE, MHE, ab earum asymptotis, & diametris ad homologas partes facti a sunt æquales, suntque alterni, quare ipsæ asymptoti inter se æquidistabunt. Quod primò, &c.

a Coroll. 40. huius.



Iam in hac prima figura, (in qua centrum H interioris DEF remotius est à verticibus B, E, quàm sit centrum G exterioris Hyperbolæ ABC) cum sint HM, HR asymptoti Hyperbolæ DEF, & in loco ab eis, & sectione terminato ducta sit GI alteri asymptoton HM æquidistans, ipsa omnino sectionem DEF secabit. * Quod secundò, &c.

* 11. h.

Sed ipsa GI, cum sit asymptotos sectionis ABC, tota cadit extra ipsam BA, quare occursus prædictæ asymptoton GI cum sectione ED, erit extra sectionem BA, vnde ipsa interior sectio ED necessariò secabit priùs exteriorem BA. Quod tertiò, &c.

Ad pleniorem autem doctrinam, si quæratur, quo nam in puncto huiusmodi Hyperbolæ se mutuò secent, ita id consequetur.

Sumpta enim GS æquali GB, erit tota BS transuersum exterioris ABC; item sumpta HT æquali HE, erit tota TE transuersum interioris DEF.

Iam, vel H centrum interioris cadit in ipso puncto S; vel supra inter S, & T; vel infra inter G, & S.

Si

Si primùm; cum sit EH æqualis HT, esset etiam EH æqualis ST, vnde eius segmentum EB minus esset distantia ST. Si secundùm; cum sit HT æqualis HE omnino ST maior esset eadem HE, & eò maior ipsius segmento BE. Si tertiùm; vt in hac ipsa figura, in qua centrum H interioris cadit inter S, & G; cum sit HE æqualis HT, & ablata HB maior ablata HS (nam est tota SB secta bifariam in G) erit reliqua BE maior reliqua ST. Quapropter in hoc casu, in quo centrum H interioris cadit vltra centrum G exterioris, vbicunq; sit eius incidentia, demonstratum est semper distantiam verticum B, E, minorem esse ipsa ST distantia inter superiora extrema transuersorum laterum ET, BS. Quod memento.

Ampliùs sint harum sectionum recta latera BV, EX, & regulæ TV, TX. Patet ob sectionum similitudinem, vt SB ad BV, ita esse TE ad EX, sed anguli ad B, E, sunt æquales (cum sectiones sint simul adscriptæ, &c.) quare in triangulis SBV, TEX, anguli ad S, T, æquales erunt, ac ideò regulæ SV, TX inter se æquidistabunt. Cumque sit ST maior BE, si dematur SK ipsi BE æqualis, ducaturque SY parallela ad EX, & abscindatur EL æqualis SY, ac iungantur KY, BL: erunt in triangulis KSY, BEL, in quibus latera circum æquales angulos S, E, sunt æqualia, vtrunque vtrique, anguli quoq; SKY, EBL æquales; suntque alterni, quare KY, & BL inter se æquidistant, sed KY secat TX, vnde & BL producta secabit TX, vt in N: Iam per N ordinatim ductis æquidistans applicetur NQDP, regulam SV, secans in Z, communem diametrum in Q, exteriorem sectionem CBA in P, & interiorem in D: Cum in triangulo BQN sit EL ipsi QN parallela, erit BQ ad QN, vt BE ad EL, & permutando QB ad BE, vt QN ad EL, siue ad SY, vel ZN, & per conuersionem rationis BQ ad QE, vt NQ ad QZ, vnde rectangulum BQZ [a] siue quadratum applicatæ PQ æquale est rectangulo EQN, siue quadrato applicatæ DQ ex quo puncta P, D in vnum conueniunt, hoc est interior Hyperbole FED exteriori ABC occurrit in D; eademque ratione ostendetur ipsas simul occurrere in F, altero extremo eiusdem applicatæ DQF, quare in ipsis occursibus se mutuò secant: quoniam si exempli gratia, huiusmodi sectiones non se secarent, sed contigerent in D, contingerent se quoque in F, vt facillimum est demonstrare, sed Hyperbole ED secat omnino rectam GI extra sectionem BA, vti superius ostendimus, quare hæc inter sectio alio in loco cadet quàm in D, pariterque ad alteram partem sectio EF secabit BC in alio puncto, præter in F: Quapropter coni-sectio coni-sectionem contingeret in duobus punctis D, F, & in alijs duobus punctis sibi ipsis occurrerent, quod est [b] impossibile: vnde in ipsis occursibus D, F se mutuò secant; quod ex abundanti ostendere proposuimus.

[a] Coroll. 1. huius.

[b] 37. 4. conic.

Si verò centrum H interioris idem fuerit cum G centro exterioris, etiam asymptotos GI eadem erit cum asymptoto HM, cum angulus IGB æqualis, vel [c] idem sit cum angulo MHE; Ergo similium concentricarum Hyperbolarum asymptoti communes sunt. Quod quartò erat, &c.

[c] Coroll. 40. huius.

Quod autem sint simul nunquam cocuntes satis patet ex prima parte 47. huius, vel quàm breuissimè ex propos. 208. septimi Pappi. Quod quintò, &c.

Si autem centrum H interioris DEF cadat infra G centrum exterioris ABC, vt in secunda figura, per verticem E contingenter applicata CEA; cum HM sit intra angulum IGO ab asymptotis factum, ac ipsi GI æquidistās,

ipsa

ipsa HM producta omnino secabit sectionem CBA, vel supra contingentem CEA, vt in N, vel in ipso occursu A, vel infra ad partes AL; si in N, vel in A, patet interiorem sectionem totam cadere infra applicatas ex N, vel ex A, & nunquam infra N, vel A sectioni BNA occurrere, ne priùs secet propriam asymptoton HM.

Si verò HM secet exteriorẽ BA infra contingentem CAE, vt in hac ipsa figura; item patet sectiones BA, ED infra LD nunquam simul conuenire, sin aliter propriam asymptoton secaret.

Præterea indirectũ producta communi diametro EBG, sumptisque in ea punctis V, T, quæ sint extrema transuersorum laterum datarum sectionum, ductisque regulis TX, VZ; ipsę vti superiùs ostensum fuit, inter se æquidistabunt. Ampliùs sumpto in portione ED quolibet puncto K, per ipsum applicetur KY vtranque Hyperbolen secans in P, K; regulas verò in Z, X.

Iam, vel recta VZ est regula interioris sectionis DEF, & TX exterioris; vel ipsæ simul congruunt, si tamen puncta V, T, in vnum conueniant; vel è contra VZ est regula exterioris, TX verò interioris. Si primum, cum in sectione ABC quadratum applicatæ PY æquale [a] sit rectangulo BYX, & in Hyperbola DEF quadratum KY sit æquale rectangulo EYZ, sitque rectangulum BYX maius EYZ, cum sub maioribus lateribus contineatur, erit quoque quadratum PY, maius quadrato KY: vnde punctum K est intra sectionem ABC. Si secundum nempe sit VZ vtriusque sectionis communis regula, erit quadratum PY æquale rectangulo BYZ, & quadratum KY æquale rectangulo EYZ, sed rectangulum BYZ maius est EYZ, cum altitudo BY maior sit altitudine EY, quare quadratum PY maius est quadrato KY, siue punctum K est intra sectionem ABC. Si denique interior recta VZ fuerit regula exterioris sectionis ABC, & exterior TX, regula interioris DEF, erit HE ipsi HT æqualis, sed est ablata HB minor ablata GV (cum ponatur GB, quæ maior est HB, æqualis GV) ergo reliqua BE maior erit residuis segmentis GH, VT, & eò maior vnico segmento VT, sed est EY minor VY, quare BE ad EY maiorem habebit rationẽ quàm TV ad VY, vel quàm XZ ad ZY, & componendo BY ad YE maiorem habebit rationem quàm XY ad YZ, vnde rectangulum BYZ [b] siue quadratum PY [c] maius erit rectangulo EYX siue quadrato [d] KY, hoc est punctum K incidet intra sectionem ABC, & sic de quolibet alio puncto portionis DEF; Quare huiusmodi similes Hyperbolæ, neque infra applicatam LF, neque inter lineas LF, AC simul conueniunt, vnde sunt in totum nunquam coeuntes. Quod sextò, &c.

a Coroll. 1. huius.

b Ibidem.
c 16. sept. Pappi.
d Coroll. 1. huius.

Quod

Quod tandem HI, aſymptotos inſcriptæ DEF, ſecet circumſcriptam Hyperbolen ABC, iam ſatis patet ex dictis. Quod ſupererat demonſtrandum.

MONITVM.

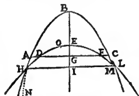
EN tibi Lector Geometra admiranda quædam Naturæ ſymptomata circa Aſymptoticas lineas iam olim à nobis detecta, ac ſimul directa demonſtratione firmata, dum in Conicis hucuſque animaduertimus non tantum binas dari lineas in eodem plano exiſtentes, quæ licet ſemper inter ſe magis accedant, nunquam tamen (quod ſane mirum eſt) etiam ſi in infinitum productæ, ſimul conueniunt; quales ſunt, conuexa linea hyperbolica, & celebris illa recta Aſymptotos Apoll. ab ipſo tunc negatiuè, à nobis verò in 8. *&* 10. *huius affirmatiuè demonſtrata: verum alias quoque, eiuſdem penitus naturæ reperiri, alteram nempe conuexam, concauam alteram, quales ſunt binæ congruentes parabolæ, vel hyperbolæ; item binæ ſimiles hyperbolæ, quarum centrum interioris, aut in ipſũ cadat, aut infra centrum exterioris, atque omnes ſint per diuerſos vertices ſimul adſcriptæ; prout vidimus in* 42. 44. 45. 47. *& elicitur ex ipſa* 48. *huius. Præterea, non ſolùm rectam Aſymptoton, & Hyperbolen dari, quæ dum ad ſe propiùs ſemper accedunt, ad interuallum aliquando perueniunt minus quolibet dato interuallo, vti ex ipſo Apollonio, & ex noſtra* 10. *innotuit; ſed congruentes item parabolas, & concentricas hyperbolas per varios vertices ſimul adſcriptas hac ipſa admirabili affectione eſſe præditas, veluti in* 42. *&* 47. *à nobis fuit oſtenſum. Verum enimuerò haud minori ſaltem admiratione dignum videtur, binas pariter lineas inueniri, quæ licet nunquam coeuntes, & in infinitum productæ ad ſe propius accedentes, non tamen vnquam perueniunt ad interuallum cuiuſdam determinatæ magnitudinis: huiuſmodi enim ſunt congruentes Hyperbolæ, pariterque hyperbolæ ſimiles per diuerſos vertices ſimul adſcriptæ, prout didicimus in* 44. *&* 45. *Alias ampliùs deteximus lineas, quarum diſtãtia perpetuò augetur, ſed nunquam tamen peruenit ad interuallum æquale cuidam terminato interuallo: tales enim ſunt recta linea alteri aſymptoton æquidiſtans, & Hyperbolen ſecãs, vna cum eadem curua hyperbolica: tales item ſunt hyperbolæ ſimiles per eundem verticem ſimul adſcriptæ, prout in* 34. *&* 41. *Oſtendimus denique binas dari lineas ad eaſdem partes in infinitum productas, nunquam coeuntes, quæ ſimul, ac ſemel ſunt, & ad ſe propiùs accedentes, & inter ſe æquidiſtantes: quales ſunt demum, parabolæ congruentes per diuerſos vertices ſimul adſcriptæ, vti ex noſtra* 42. *eiuſque primo Coroll. iam ſatis patuit.*

THEO-

THEOR. XXVII. PROP. XXXXIX.

Si binæ Parabolæ, aut binæ concentricæ Hyperbolæ fuerint per diuersos vertices simul adscriptæ, ipsæ, vel ad neutram partem se vnquam secabunt, vel si ad alteram partem occurrant, occurrent quoque ad aliam, punctaque occursuum erunt extrema eiusdem communis applicatæ, ac in ijsdem occursibus se mutuò secabunt.

Sint duæ Parabolæ ABC, DEF, vel duæ concentricæ Hyperbolæ per diuersos vertices B, E simul adscriptæ. Dico primùm, si huiusmodi sectiones ad alteram partium, vt ad A nunquam conueniunt, ad aliam quoque C nunquam conuenire.



Nam sumpto in sectione DEF, ad partes C, quocunque puncto F, per ipsũ ordinatim applicetur recta CFGDA, quæ vtrinque producta, vtrique sectioni occurret (cum ipsæ ob Hypotesim, sint sectiones in infinitam distantiam abeuntes ad inferiores partes) cumque in sectione ABC sit semi-applicata AG, æqualis GC, & in sectione DEF, semi-applicata DG, æqualis GF, sitque antecedens AG maior antecedente DG (cum ad partes A nunquam cõueniant) erit etiam consequens GC, maior consequenti GF, quare punctum F, sectionis DEF cadit intra ABC, & sic de reliquis. Quod primò, &c.

Si verò sectiones ad alteras partes, veluti ad A, & D conueniant vt in H. Dico ipsas ad alias quoque partes simul occurrere ad extrema puncta eiusdem applicatæ.

Nam, ducta per H communi applicata HI, ipsa producatur secans sectionem BC in L; & EF in M. Erit in sectione ABC semi-applicata HI æqualis IL, & in sectione DEF eadem HI æqualis IM; ergo IL, & IM æquales, ideoque sectionum puncta L, M in vnum conueniunt; Quare cum sectiones ABC, DEF non per vertices simul adscriptæ ad alteram partem occurrunt, occurrent quoque ad aliam, punctaque occursuum erunt extrema eiusdem communis applicatæ.

Quod autem in occursibus H, & L se mutuò secent, sic demonstratur. Nam si huiusmodi sectiones tangerent se mutuò in occursu H, ita vt sectionis, verbi gratia, ED partes HO, HN cadant totæ intra sectionem ABC: sumpto in altera ipsarum partium, vt puta OH, quolibet puncto D, & per ipsum ducta communi applicata ADGFG vtranque sectionem secans, erunt in sectione ABC rectæ AG, GC æquales, & in sectione DEF rectæ DG, GF itẽ equales, sed est AG maior GD cum ponatur peripheria OH cadere intra BH, vnde & CG maior erit ipsa FG, hoc est punctum F cadet intra. Idemque demonstrabitur de quolibet alio extremo puncto cuiuscunque applicatæ inter O, & N, tùm supra, tùm infra occursum L: quare sectio DEF continget ipsam

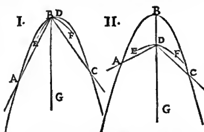
ipſam ABC in puncto L, ſed poſitum fuit eam quoque contingere in H: Ergo in duobus punctis H, L ſe contingent; quod eſt falſum; nam Parabole Parabolen, ſiue Hyperbole Hyperbolen concentricam *a* in duobus punctis non contingit. Non ergo tales ſectiones ſe tangunt in H; neque in L, ob eandem rationem; quare ipſæ in occurſibus H, & L ſe mutuò ſecant. Quod erat oſtendendum. *a* 28.31.4. conic.

THEOR. XXVIII. PROP. L.

Impoſſibile eſt Hyperbolen Parabolæ, per eundem, vel per diuerſos vertices inſcribere. Item.

Impoſſibile eſt Parabolen Hyperbolæ, per eundem, vel per diuerſos vertices circumſcribere.

ESto Parabole ABC, cui per punctum D in ea ſumptum, vt in prima figura, vel intra ipſam, vt in ſecunda, adſcripta ſit quæcunque Hyperbole EDF circa communem diametrum BDG, quæ per aliquas ſuæ peripheriæ partes DE, DF, hinc inde à diametro ſumptas cadat intra Parabolen ABC. Dico ipſam Hyperbolen, ſi producatur, ex vtraque parte Parabolen ſecare.



Nam ductis ex D rectis DA, DC vtrique aſymptoto Hyperbolæ EDF æquidiſtãtibus, hę neceſſariò Parabolen ſecabunt, *a* vt in A, C; ſed cum Hyperbola in alio puncto quàm D nunquam *b* conuenient: quare, cum Hyperbola EDF ex vtraque parte in infinitum habeat, ſi producatur, occurret denique Parabolæ ABC inter puncta B, A, & puncta B, C; eamque ſecabit, nam ſi tantùm eam tangeret, vel non, ſi vlteriùs producatur intra Parabolen, ſecaret aliquandò rectas DA, DC; quod *c* eſt impoſſibile. Non igitur inſcribi vnquam poteſt Hyperbole datæ Parabolæ, per punctum in ea, vel intra ipſa datum, eadem ratione demonſtrabitur non poſſe circumſcribi Parabolen datæ Hyperbolę per punctum in ea, vel extra ipſam datum. Quod erat, &c.

a 27. primi conic.

b Coroll. 11. huius.

c ibidem.

COROLL.

HInc patet non dari *MAXIMAM* Hyperbolen datæ Parabolæ, vel per eundem verticem, vel per diuerſos inſcriptibilem; itemque non dari *MINIMAM* Parabolen datæ Hyperbolæ, vel per eundem, vel per diuerſos vertices circumſcriptibilem.

M PRO-

PROBL. XVII. PROP. LI.

Datæ Parabolæ per punctum intra ipsam datum MAXIMAM Parabolen inscribere, & è contra.

Datæ Parabolæ per punctum extra ipsam datum MINIMAM Parabolen circumscribere.

Sit data Parabole ABC, & oporteat primò per punctum D intra ipsam datum *MAXIMAM* Parabolen inscribere.

Ducatur diameter BDE, cuius rectum latus sit BF, (quod in posterùm intelligatur semper ex vertice cõtingenter applicatum sectioni, prout in præcedentibus factum est, & in quinta primarũ definitionũ monuimus) & per verticem D, circa diametrũ DE adscribatur [a] datæ Parabolæ ABC Parabole GDH, cuius rectum DI æquale sit recto BF; nam ipsa erit congruens datæ: Dico hanc esse *MAXIMAM* inscriptam quæsitam.

[a] 5. huius.

Nam cum ipsæ sint congruentes Parabolæ per diuersos vertices simul adscriptæ [b] erunt inter se nunquam coeuntes: quare GDH datæ ABC erit per datum punctum D inscripta.

[b] 42. h.

Ampliùs, quælibet alia Parabole per verticem D adscripta cum recto, quod minus sit ipso DI minor [c] est Parabola GDH, quæ verò cum recto DL, quod excedat ipsum DI, qualis est MDN, est quidem [d] maior GDH, sed omnino secat circumscriptam ABC. Nam si fiat vt LI ad ID, ita BD ad DE, & per E applicetur EMA secans BA in A, & DM in M. Cum sit BD ad DE, vt LI ad ID, erit componendo BE ad ED, vt LD ad DI; vnde rectangulum sub extremis BE, & DI, siue BF, hoc est [e] quadratum applicatæ AE in Parabola ABC, æquale erit rectangulo sub medijs ED, DL [f] siue quadrato applicatę ME in Parabola MDN, ac ideò AE, ME sunt æquales, quapropter Parabole DN occurrit sibi adscriptæ BA, per diuersos vertices in puncto M, & ob id in eodem occursu, & ad alteram quoque partem se mutuò [g] secabũt: Itaque congruens Parabole GDH erit *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod primò, &c.

[c] 2. Coroll. 19. h.
[d] ibidem.
[e] Coroll. 1. huius.
[f] ibidem.
[g] 50. h.

IAM datæ Parabolæ GDH, oporteat per punctum B extra ipsam datam *MINIMAM* Parabolen circumscribere.

Ducatur BDE diameter datę GDH, cuius rectum sit DI, & ei adscribatur per B, cum recto BF, quod æquet ipsum DI, congruens Parabole ABC:

Dico

Dico hanc esse *MINIMAM* circumscriptam quæsitam.

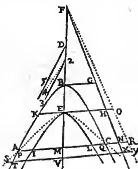
Cum sint enim ipsæ Parabolæ congruentes, & per diuersos vertices adscriptæ, erunt [a] inter se nunquam coeuntes quare ABC datæ GDH erit circumscripta. [a] 42. h.

Præterea, quælibet alia Parabole per B adscripta cum recto, quod excedat BF, maior est ipsa ABC, quę verò cum recto BO, quod minus sit ipso BF, qualis est PBQ, est quidem minor ipsa ABC, sed omnino secat inscriptam GDH. Quoniam si fiat vt FO ad OB, ita BD ad DE, ac per E applicetur EGP secans DG in G, & BP in P: cum sit BD ad DE, vt FO ad OB, erit componendo BE ad ED, vt FB ad BO; vnde rectangulum sub BE, & BO [b] siue quadratum applicatæ EP in Parabola PBQ æquale erit rectangulo sub medijs ED, & BF, siue DI, hoc [c] est quadrato applicatę EG in Parabola GDH: vnde EP, EG sunt æquales. Occurrit ergo Parabole BP, sibi adscriptæ DG per diuersos vertices, in puncto P, quare in eodem occursu, & ad alteram partem [d] se mutuò secant. Quapropter congruens Parabole ABC erit *MINIMA* circumscripta quæsita. [b] 1. Coroll. 1. h. [c] ibidem. [d] 50. h.

PROBL. XVIII. PROP. LII.

Datæ Hyperbolę, per punctum intra ipsam datum MAXIMAM Hyperbolen inscribere, quarum eadem sit regula.

ESto data Hyperbole ABC, cuius centrum D; & punctum intra ipsam datum sit E. Oportet per E Hyperbolen inscribere, quæ sit *MAXIMA*, sed tamen eius regula sit quoque regula datæ sectionis.



Iungatur ED secans datã sectionem in B, & producta sumatur DF æqualis BD, erit [a] FB trãsuersum sectionis ABC, cuius vertex B, sitque BG eius rectum latus, & regula FG, quæ producatur, & per E sit ducta EH parallela ad BG, & per verticẽ E, circa communem diametrum BE, datę sectioni ABC [b] adscribatur Hyperbole IEL, cuius latera sint FE, EH, hoc est eadem sit regula FGH: patet ipsam IEL datæ ABC esse inscriptam, cum in infinitum productæ sint inter [c] se nunquam coeuntes. [a] 47. 1. conic. [b] 7. huius. [c] 45. h.

Dico ampliùs ipsam IEL esse *MAXIMAM*. Quoniam quęlibet alia adscripta per verticem E, cum eodem transuerso FE, sed cum recto, quod minus sit recto EH, minor [d] est ipsa IEL; quæ verò cum recto EO, quod excedat EH, qualis est Hyperbole PEQ, est quidem [e] maior ipsa IEL; sed omnino secat ipsam ABC. Nam si fiat vt OH ad HE, ita BE ad EM, & per M applicetur MPA Hyperbolen PEQ secans in P, BA verò in A, & producta secet regulam FH, in N, & iunctam regulam FO descriptæ Hyperbolæ PEQ in R. [d] 2. Coroll. 19. h. [e] ibidem.

Cum ſit BE ad EM, vt OH ad HE, erit componendo BM ad ME, vt OE ad EH, vel vt RM ad MN; quapropter rectangulum BMN [a] ſiue quadratum applicatæ AM in Hyperbola ABC, æquale erit rectangulo EMR, [b] ſiue quadrato applicatę MP in Hyperbola PEQ; ac ideò lineæ MA, MP ſunt æquales, quare Hyperbolæ ABC, PEQ occurrunt ſimul in puncto Q, in quo etiam ſe mutuò ſecabunt. Nã ſumpto in ſectione QEP infra P quolibet puncto S, per quod applicata STV, ſectionem ABC, diametrum, ac regulas ſecans in T, V, X, Y: cum ſit EM minor EV, habebit BE ad EM, vel OH ad HE, vel YX ad XV, maiorem rationem quam BE ad EV, & componendo YV ad VX maiorem rationem, quàm BV ad VE, vnde rectangulum YVE, [c] ſiue quadratum VS in Hyperbola EAS, [d] maius erit rectangulo XVB, [e] ſiue quadrato VT in Hyperbola ABC: vnde punctum S cadit extra Hyperbolen ABC, ac ideò ipſæ Hyperbolæ ſe mutuò ſecant, ſicuti in altero extremo Q, eiuſdem applicatæ. Erit ergo Hyperbole IEL, quæ datæ ABC ſimilis eſt, & ad eandem regulam, *MAXIMA* inſcripta quæſita. Quod erat, &c.

[a] Coroll. 1. huius.
[b] ibidem.
[c] Coroll. 1. huius.
[d] 16. ſept. Pappi.
[e] Coroll. 1. huius.

Verùm cum ad inueſtigationem MAXIMAE, & MINIMAE inſcriptæ, ac circumſcriptæ ſectionis, nil referat ignorare quo nam in puncto, maior, vel minor quæſitarum ſectionum, datæ ſectioni occurrat, (ſufficit enim oſtendere ipſas, vbicunq; ſit earum occurſus, aliquando ſe mutuò ſecare) ideò in proximè ſequentibus problematibus, hac omiſſa methodo per applicatarum potentias, tanquam prolixiori, & minus concinna, hoc ipſum aliter elegantiori induſtria demonſtrabimus, & licet id pluribus, ac varijs aggreſſionibus conſequi poſsit, vt in hac, & proxima propoſitione videre licet, tamen eas eligemus, quæ apportunæ magis nobis videbuntur.

ALITER.

SEcetur igitur EF bifariam in 2, erit 2 centrum Hyperbolarum IEL, PEQ, ex quo ductis harum aſumptotis, videlicet 2 3 inſcriptæ IEL, & 2 4 circumſcriptæ PEQ, quæ cadet [a] extra aſymptoton 2 3, ex D quoque agatur D 5 aſymptotos Hyperbolæ ABC.

Iam cum Hyperbolæ ABC, IEL ſimiles ſint, per diuerſos vertices, & ad eandem regulam FGH ſimul adſcriptæ, erunt earum aſymptoti D 5, 2 3 inter [b] ſe parallelæ, ſed 2 4 inter ipſas cadit, & alteram 2 3 ſecat in 2, quare ipſa 2 4 producta ad partes 4, ſecabit & reliquam D 5; ſed eſt 2 4 aſymptotos ſectionis SPEQ, & quædam recta D 5 occurrit ei, ac ſectionis diame-

[a] Ex vltima parte 37. huius.
[b] Coroll. 45. huius.

diametro vltra centrum z in D, quare si eadem D 5 producatur, necessariò a secabit Hyperbolen SPEQ, sed ipsa D 5 tota cadit extra Hyperbolen ABC, cum sit eius asymptotos, quapropter occursus rectæ D 5 cum Hyperbola SPEQ fiet extra ABC, ideoque sectio EP secabit priùs Hyperbolen ABC, & sic Hyperbole IEL erit *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod faciendum, ac demonstrandum erat. a 35. h.

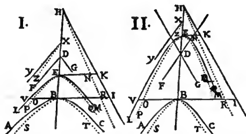
ALITER breuiùs.

PRoducatur contingens HE vsque ad circumscriptā sectionem ABC in K. Cum Hyperbolę ABC, IEL similes sint per diuersos vertices, & ad eandem regulam simul adscriptæ b erunt infra EK ad se propiùs accedentes, nimirum sectio KAT recedet ab EI per interuallum minus ipso EK; Verùm eum Hyperbolę PEQ, IEL sint concentricæ, & per eundem verticem simul adscriptæ, erunt semper magis recedentes, & ad interuallū peruenient maius quocunq; dato interuallo, videlicet sectio EPS recedet ab eadem EI per interuallū omnino maius eodē EK: quapropter sectiones KAT, EPS necessariò se mutuò secabunt: Vnde Hyperbole IEL erit *MAXIMA* inscripta quæsita. b 45. h. c 37. h.

PROBL. XIX. PROP. LIII.

Datæ Hyperbolæ, per punctum extra ipsam datum MINIMAM Hyperbolen circumscribere, quarum eadem sit regula.

Oportet autem datum punctum, vel esse in angulo asymptotis contento, vel in eo, quod est ad verticem, dummodo in hoc casu, ipsius distantia à centro datæ sectionis, minor sit eius semi-transuerso latere per datum punctum transeunte.



EStò data Hyperbole ABC, cuius centrum D, asymptoti DF, DG, & datum extra ipsam punctum sit E, quod tamen sit in angulo asymptotali FDG, vt in prima figura; vel in eò qui ipsi est ad verticem, vt in secunda, dummodo coniuncta ED, & producta vsque ad sectionem in B, ipsa ED minor

nor ſit ſemi-tranſuerſo DB: (ſi enim datum punctum eſſet in angulis, qui deinceps ſunt, recta linea per ipſum datum punctum, & centrum ſectionis ducta non eſſet eius diameter, cum nunquam ſectioni [a] occurreret, ac ideò problema, iuxta quintam ſecundarum definitionum inſolubile eſſet: & cum fuerit in angulo ad verticem, vt in ſecunda, niſi diſtantia ED minor ſit ſemi-tranſuerſo DB, Hyperbole ad regulam datæ adſcribi minimè poſſet, vt ſatis patet) oportet per E *MINIMAM* Hyperbolen circumſcribere, cuius regula eadem ſit cum regula datæ ſectionis.

[a] Monit. poſt 11. h.

Iungatur ED, & ad partes ſectionis producatur donec ei occurrat in B, ſumptaq; in directum DH æquali DB, erit HB tranſuerſum [b] ſectionis ABC, cuius vertex B: ſit ergo BI eius rectum latus, & regula HI; ſitque EK æquidiſtans BI, & per verticem B, cum tranſuerſo EH, & recto EK, ſiue ad eandem regulam HI adſcribatur Hyperbole LEM: patet ipſam datæ ABC eſſe inſcriptam, cum ſimul [c] ſint nunquam coeuntes.

[b] 47. primi conic.

[c] 45. h.

Dico ampliùs ipſam LEM eſſe *MINIMAM* quæſitam. Quoniam quęlibet alia adſcripta per verticem E, cum eodem verſo HE, ſed cum recto, quod excedat EK, maior [d] eſt ipſa LEM; quæ verò cum recto EN, quod minus ſit EK, qualis OEQ, eſt quidem [e] minor eadem LEM, ſed omnino ſecat ipſam ABC. Nam ad productam regulam HN, ſecantē BI in R adſcribatur per B Hyperbole SBT; hæc tota cadet [f] intra ABC, eruntque SBT, OEQ duæ ſimiles Hyperbolæ per diuerſos vertices adſcriptæ ad eandem regulam HR, eſtque ABC ipſi SBT, per eundem verticem, & cum maiori recto latere BI adſcripta, quare per præcedentem [g] ſectiones ABC, OEQ ſe mutuò ſecabunt: Vnde Hyperbole LEM eſt *MINIMA* circumſcripta quæſita. Quod faciendum, & demonſtrandum erat.

[d] 2. Coroll. 19. h.

[e] ibidem.

[f] ibidem.

[g] 52. h.

ALITER.

SEcetur EH biſariam in X: erit X centrum vtriuſque LEM, OEQ: ſi ergo ex centris X, D, ducantur XY, XZ, DF ſectionum LEM, OEQ, ABC aſymptoti, hoc eſt XY circumſcriptæ LEM; XZ inſcriptæ OEQ, quæ infra XY [h] cadet; & DF ſectionis ABC, quæ ipſi XY æquidiſtabit; cum XZ ſecet * XY in

[h] Ex vltima parte 37 huius.

* coroll. 40. h.

XY in X, producta secabit etiam DF asymptoton ABC, ac ipsam quoque sectionem ABC, [a] sed XZ tota cadit extra OEQ, cum sit eius asymptotos, quare occursus rectæ XZ cum sectione ABC cadet extra OEQ, ac ideò sectio ABC occurret priùs sectioni OEQ. Quapropter Hyperbole LEM est *MINIMA* circumscripta quæsita. Quod, &c. [a] 35. h.

ALITER breuiùs.

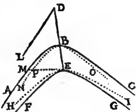
PRoducatur contingens IB vsq; ad circumscriptam sectionem in V. Cum sectiones BA, EL similes, & ad eandem regulam HI, infra BV ad se propiùs [b] accedant sectio BA recedet ab VL per interuallum aliquando minùs BV, sed inscripta OP recedit ab eadem VL per interuallũ maius eodem BV, cum sint semper magis recedẽtes, & [c] ad interuallum perueniant maius quolibet dato interuallo: quare BA, & OP omnino se mutuò secabũt. Quod iterum erat, &c. [b] 45. h. [c] 37. h.

PROBL. XX. PROP. LIV.

Datæ Hyperbolę, per punctum intra ipsam datum MAXIMAM concentricam Hyperbolen inscribere, & è contra.

Datæ Hyperbolæ, per punctum extra ipsam datum MINIMAM concentricam Hyperbolen circumscribere. Oportet autem datum punctum esse in angulo asymptotali.

ESto data Hyperbole ABC, cuius centrum D, asymptotos DL, & punctum intra sectionem datum sit E: oportet primò per E *MAXIMAM* ei concentricam Hyperbolen inscribere.



Iungatur ED secans ABC in B: erit DB [a] semi-transuersum sectionis ABC, cui per E [b] cum semi transuerso ED adscribatur similis, & concentrica Hyperbole FEG (hoc autem fieri posse manifestum est:nam sectionis FEG datur olus asymptotos DL, cum similes concentricæ Hyperbolæ per diuersos vertices adscriptæ [c] habeant communem asymptoton, & cum datur transuersum latus, & asymptotos datur quoque rectum) patet hãc sectionẽ FEG datæ ABC esse inscriptam, cum sint [d] nunquã simul coeuntes. [a] 47. primi conic. [b] 7. huius. [c] Coroll. 47. huius. [d] 47. h.

Dico ampliùs hanc ipsam FEG esse *MAXIMAM* quæsitam: quoniam quęlibet alia per E verticem adscripta ipsi ABC, vel FEG minor [e] est ipsa FEG; quælibet, verò cum recto, quod prædictum excedat, qualis est HEI, est quidem [f] maior eadem FEG, sed omnino secat circumscriptam ABC. Nam cum Hyperbolæ FEG, HEI sint concentricæ, & per eundem verticem E simul adscriptæ, sitque DL asymptotos inscriptæ FEG, ipsa secabit circum- [e] 2. Coroll. 19. h. [f] ibidem.

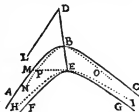
scri-

[a] 37. h. scriptam [a] HEL, sed eadem DL est asymptotos ABC, siue tota cadit extra ABC, quare DL, & sectio EH secabunt se mutuò extra sectionem BA, quapropter EH secabit priùs sectionem BA: ex quo similis, & concentrica Hyperbole FEG erit *MAXIMA* quæsita: Quod primò faciendum, & demonstrandum erat.

ALITER breuiùs.

[b] 47. h. [c] 37. h. DVcatur ex E contingens EM. Sectio MA accedit [b] sectioni EF per interuallum minus quolibet dato interuallo; at sectio EH quæ cadit extra EF, [c] recedit ab eadem EF per interuallum maius eodem dato interuallo; quare MA, & EH necessariò se mutuò secant: Vnde FEG est *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod iterum, &c.

IAM sit data Hyperbole FEG, cuius centrum G, asymptotos DL, & oporteat per datum extra ipsam punctum B (quod tamen sit in angulo asymptotali, ob rationem in præcedenti propos. allatam) *MINIMAM* Hyperboleu circumscribere.



Iungatur DB, & producatur sectioni FEG occurrens in E, & cum semi-transuerso BD, per verticem B, adscribatur similis, & concentrica Hyperbole ABC: patet hanc esse datæ FEG circumscriptã, [d] 47. h. cum nunquam [d] simul conueniant.

Dico præterea ipsam esse *MAXIMAM* quæsitam. Quoniam quæcunque alia adscripta per B ipsi FEG, vel ipsi ABC concentrica, cum recto, quod maius sit [e] 1. Coroll. 19. h. recto sectionis ABC, maior [e] est ipsa ABC, quæ verò cum recto, quod prædicto sit minus, qualis est Hyperbole [f] ibidem. NBO, est quidem [f] minor eadem ABC, sed omnino secat inscriptam FEG. [g] 47. h. Quoniam sectio MA accedit [g] sectioni EF per interuallum minus quolibet [h] 37. h. dato interuallo; sed sectio PN est intra MA, & ab ipsa [h] recedit per interuallum maius eodem dato interuallo; quare PN, & EF necessariò se mutuò secant. Igitur similis, & concentrica Hyperbole ABC est *MINIMA* circumscripta quæsita. Quod secundò faciendum erat.

Quod in hac, & in duabus præcedentibus factum est, idem simul, ac vniuersalius habebitur in sequenti.



PRO-

PROBL. XXI. PROP. LV.

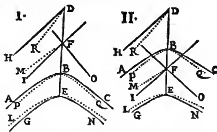
Datæ Hyperbolæ, per punctum intra ipſam datum, cum dato ſemi-tranſuerſo latere, quod tamen non excedat diſtantiam inter datum punctum, & datæ ſectionis centrum, MAXIMAM Hyperbolen inſcribere: & è contra.

Datæ Hyperbolæ, per punctum extra ipſam datum, cum dato ſemi-tranſuerſo latere MINIMAM Hyperbolen circumſcribere.

Oportet autem datum punctum, vel eſſe in angulo aſymptotali, vel in eo, qui eſt ad verticem; & ſi in primò caſu, neceſſe eſt, vt ſemi-tranſuerſum excedat interuallum inter datum punctum, & centrum datæ ſectionis: in ſecundò verò ſit cuiuslibet longitudinis.

ESto Hyperbole ABC, cuius centrum D, & datum intra ipſam punctum ſit E: oportet primò per E, cum dato ſemi-tranſuerſo EF (quod ſit minus interuallo ED) *MAXIMAM* Hyperbolen inſcribere.

Iungatur ED ſecans ABC in B, & ex ipſa ED dematur EF æqualis dato ſemi-tranſuerſo, & per verticem E, cum centro F adſcribatur ſectioni [a] ABC Hyperbole EG ſimilis datæ ABC; quæ (cum habeat centrum F, vel in ipſo D, ſi nempe datum ſemi-tran ſuerſum EF æquale fuerit iunctæ ED, vel infra idem centrum D, ſi datum fuerit ipſa ED minus) erit [b] datæ Hyperbolæ ABC inſcripta. Dico hanc eſſe *MAXIMAM* quæſitam.



[a] 6. huius.

[b] 48. h.

Quoniam quælibet alia per verticem E, cum eodem tranſuerſo EF adſcripta, ſed cum recto, quod ſit minus recto ſectionis EG, ipſa EG minor [c] eſt; quæ verò cum recto, quod ipſum excedat qualis eſt EL [d] eſt quidem maior eadem EG, ſed omnino ſecat circumſcriptam ABC. Nam ducta FI aſymptoto ſectionis EG, & FM ſectionis EL, (quæ FM cadet extra EI, vt patet ex vltima parte 37. huius) ac DH ſectionis ABC: erunt [e] DH, FI inter ſe parallelę, ſed FM aſymptotos EL producta ſecatur à DH, cum ſecetur quoque ab altera parallelarum in F, quare ipſa DH ſecabit [f] Hyperbolen EL; ſed DH tota cadit extra ABC, cum ſit eius aſymptotos, ideò occurſus rectę DH cum ſectione EL, erit extra ipſam ABC, vnde EL neceſſariò ſecabit priùs circumſcriptam ABC. Erit ergo EG *MAXIMA* inſcripta quæſita, cum dato ſemi tranſuerſo EF. Quod primò erat, &c.

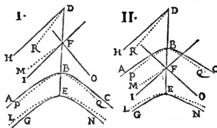
[c] 2. Coroll. 19 h.

[d] ibidem.

[e] 48. h.

[f] 35. h.

IAM oporteat datæ Hyperbolæ GEN, cuius asymptoti sint FI, FO per datum extra ipsam punctum B (quod tamen sit, vel in angulo asymptotali IFO, vt in prima figura, vel in eo, qui ipsi est ad verticem, vt in secunda, ob id quod in 53. huius monuimus, cum dato semi-transuerso latere BD (quod in primo casu excedat distantiam BF, in secundo verò sit cuiuslibet longitudinis) *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere.



Iungatur FB, quę protracta datæ sectioni GEN occurrat in E, & producta EB ad partes oppositæ sectionis, sumatur BD æqualis dato semi-transuerso; quę ex hypotesi vtrobique cadet in angulo asymptotali, siue vltra centrum F, & per verticem B, datæ Hyperbolæ GEN, adscribatur *a* similis Hyperbole ABC, cum semi-transuerso dato BD, quæ ipsi GEN *b* erit circumscripta: Dico hanc esse *MINIMAM* quæsitam. Quoniam quælibet alia per B ei adscripta cum recto, quod maius sit eius recto latere, maior *c* est ipsa GEN, quæ verò cum recto, quod prædicto sit minus, qualis est PBQ, est quidem *d* minor eadem GEN, sed omnino secat inscriptam GEN. Ductis enim DH, DR, FI, quæ sint asymptoti sectionum ABC, PBQ, GEN: *e* erit DH ipsi FI parallela, & DR cadet infra DH, ex vltima parte 37. huius, sed ei occurrit in H, quare DR producta secabit alteram parallelam FI, nempe asymptoton sectionis GEN, & vlteriùs producta, ipsam, & sectionem GEN secabit *f* sed ipsa DR tota cadit extra PBQ, cum sit eius asymptotos, quapropter occursus rectæ DR cum sectione GEN cadet extra sectionem PBQ, ac ideò inscripta sectio GEN, sectionem PBQ priùs secabit: vnde ABC erit *MINIMA* circumscripta quæsita. Quod secundò faciendum, ac demonstrandum erat.

* * *

a 6. huius.
b 48. h.
c 2. Coroll. 19. h.
d ibidem.
e 48. h.
f 35. h.



PRO-

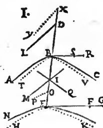
PROBL. XXII. PROP. LVI.

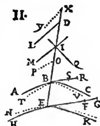
Datæ Hyperbolę, per punctum extra ipsam datū, cum dato recto latere non excedente rectum Hyperbolæ, quæ similis sit, & concentrica datæ per datum punctum adscriptæ, MAXIMAM Hyperbolen inscribere: & è contra.

Datæ Hyperbolæ, per punctum extra ipsam datum, cum dato recto latere MINIMAM Hyperbolen circumscribere.

Oportet autem datum punctum, vel esse in angulo asymptotali, vel in eo, qui est ad verticem, dummodo in primò casu datum rectum latus non sit minus recto eius Hyperbolæ, quæ similis sit, & concentrica datæ per datum punctum adscriptæ, in secundò verò sit cuiuslibet magnitudinis.

Sit data Hyperbole ABC, cuius centrum D, & datū intra ipsam punctum sit E: oportet primò per E, cum dato recto EF *MAXIMAM* Hyperbolen inscribere.





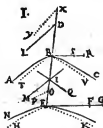
Iungatur ED secās ABC in B, & per E concipiatur [a] adscribi Hyperbole EN similis, & concentrica datę ABC, cuius rectum sit EG, quod ex more, ordinatim applicetur diametro EB, & cum dato recto EF, quod non sit maius EG, adscribatur ipsi ABC similis Hyperbole HEK, cuius centrum sit I; erunt ergo Hyperbolæ EH, EN inter se similes, quare vt rectum EF, ad rectum EG, ita semi-transuersum EI ad semi-transuersum ED, & ponitur EF non maius EG, quare EI non maius erit ED, siue punctum I centrum sectionis EH, vel cadet in ipso D, vel infra D centrum ABC, quapropter ipsa EH datæ ABC erit [b] inscripta.

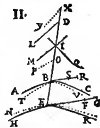
Ampliùs: dico ipsam EH esse *MAXIMAM* quæsitam. Nam quælibet alia per E adscripta, cum eodem recto EF, sed cum semi-transuerso, quod maius sit ipso EI, est [c] minor sectione EH, quæ verò cum eodem recto EF, at cum semi-transuerso EO, quod minus sit EI, qualis ponatur esse sectio EN, est quidem [d] maior eadem EH, sed omnino secat datam ABC: quoniam ductis DL, IM asymptotis sectionum ABC, EH, ipsæ erunt [e] inter se parallelæ: ductaque OP asymptoto sectionis EN, ipsa OP secabit IM infra [f] contingentem, ex communi sectionum vertice E, & producta alteri æquidistanti DL

a 6. huius.
b 48. h.
c 3. Coroll. 19. h.
d ibidem.
e 48. h.
f Coroll. 36. huius.

a 35. h. occurret, si ergo ipsa DL producatur, omnino secabit a Hyperbolen EN, sed DL tota cadit extra sectionem ABC, cum sit eius asymptotos, quare occursus rectæ DL, cum sectione EN, cadet extra ABC, ac ideò EN secabit priùs circumscriptam ABC: vnde sectio HEK est *MAXIMA* inscripta quæsita, cum dato recto EF. Quod primò erat, &c.

IAM oporteat datæ Hyperbolę HEK, cuius asymptoti IM, IQ, per datum extra ipsam punctum B, quod (per ea, quæ in 53. huius) sit vel in angulo ad verticem asymptotalis, vt in prima figura, vel in ipso asymptotali MIQ, vt in secunda, cum dato recto latere *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere.





Iungatur BI, & producatur vsque occurrat datæ sectioni HEK in E; erit IE, ipsius semi-transuersum, cuius rectum latus sit EF, & ex B cōcipiatur adscribi Hyperbole TBV similis, & concentrica datæ HEK, cuius rectum sit BS; & datū rectum BR, in casu primæ figuræ (in quo datum punctum B cadit in angulo ad verticem asymptotalis MIQ) sit cuiuslibet longitudinis; in secundo verò non sit minus BS, & per B cum recto BR adscribatur Hyperbole ABC similis datæ HEK, quæ item similis erit TBV, & sit eius centrum D: erit ergo in secunda figura, ob Hyperbolarum ABC, TBV similitudinem, rectum BR ad BS vt semi-transuersum BD ad semi-transuersum BI, estq; BR non minus BS, quare BD erit non minus BD; ex quo centrum D sectionis ABC, vel cadet in I, vel supra I centrum

b 48. h. similis sectionis HEK: vnde ipsa ABC erit b omnino datæ HEK circumscripta.

Dico tandem ipsam ABC esse *MINIMAM* quæsitam: Quoniam alia Hyperbole, quæ per B adscribitur, cum eodem recto BR, sed cum semi-transc 3. Co-uerso, quod minus sit BD, est c maior ipsa ABC; quæ verò cum eodem re-19. huius. cto BR, & cum semi-transuerso BX, quod excedat BD, qualis dicatur esse

d ibidem. sectio TBV, est quidem d minor eadem ABC, sed omnino secat datā KEH. Ductis enim similium Hyperbolarum ABC, HEK asymptotis DL, IM; ipsę erunt inter se parallelæ; ductaque XY asymptoto sectionis TBV; cum sint Hyperbole ABC, TBV per eundem verticem B adscriptæ, cum eodem recto BR earum asymptoti DL, XY infra contingentem ex vertice B se mutuò

e Coroll. secabunt, e & cum XY secet DL, & alteram huic æquidistantem IM secabit;
36 huius. sed est IM asymptotos HEK, vnde XY producta f secabit quidem HEK, at
f 35. h. XY tota cadit extra TBV, cū sit eius asymptotos; quare XY conueniet cum sectione HEK, extra Hyperbolen TBV, vnde ipsa TBV secabit priùs inscriptam sectionem HEK. Quapropter sectio ABC est *MINIMA* circumscripta quæsita: cum dato recto BR. Quod secundò faciendum, ac demonstrandum erat.

CO-

COROLL. I.

EX quinque proximè præcedentibus problematibus satis constat, *MAXIMAM*, vel *MINIMAM* Hyperbolen, inscriptam, vel circumscriptam cuilibet datæ per punctum intra, vel extra Hyperbolen datū in locis possibilibus, ad eandem regulam, aut concentricè adscriptam, vel cuius centrum pro inscripta cadat infra centrum datæ, & pro circumscripta cadat vltra, semper eidem datæ Hyperbolæ similem esse.

COROLL. II.

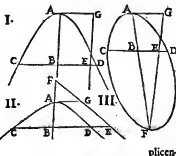
PAtet quoque, *MAXIMAM* Hyperbolarum datæ Hyperbolæ similium, per datum intra ipsam punctum inscriptarum, esse concentricam, cum hæc, inter similes, sit *MAXIMORUM* laterum. Item *MINIMAM* Hyperbolarum datæ Hyperbolæ similium per datum extra ipsam punctum in angulo asymptotali, circumscriptarum, esse pariter concentricam, cum eadem, inter similes, sit *MINIMORUM* laterum.

PROBL. XXIII. PROP. LVII.

Datis magnitudine, & positione cuiuslibet coni-sectionis diametri segmento, & vna applicatarum, & pro Hyperbola, & Ellipsi dato etiam transuerso latere; imperatam coni-sectionem describere.

SIt in qualibet figura, pro quacunque coni-sectione, datum magnitudine, & positione diametri segmentum AB, & vna applicatarum CD, & pro Hyperbola, & Ellipsi in secunda, & tertia, datum sit quoque rectum latus AF, quod pro Hyperbola in secunda vltra BA ipsi in directum ponatur, & in tertia, ex A ad partes B: oportet circa diametrum AB, super applicatam CD, quæsitam coni-sectionem describere.

Fiat in singulis figuris, vt AB ad BC, ita BC ad BE ipsi BC in directum positā, & per E, in prima figura, ducta EG parallela ad BA, vel in secunda, & tertia iuncta FE, occurrat AG, (quæ ipsi CD æquidistet) in G, & per verticem A cum data diametro AB, datisque lateribus AF, A G describatur [a] quæsiti nominis sectio CAD, cuius ordinatim ductæ ad angulum ABD applicen-



[a] 5. 6. 7. huius.

plicentur. Dico ipsam esse quæsitam. Cum enim sit CB media proportionalis inter altitudinem BA, & latitudinem BE, erit [a] BC, itemque ei æqualis BD, descriptæ sectionis semi-applicata, nempe sectio per C, & D omnino transibit; estque A vertex, AB diameter, & AF transuersum Hyperbolæ, aut Ellipsis, ex constructione: quare factum est quod erat propositum.

[a] Coroll. prop. 1.h.

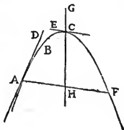
COROLL.

EX hac constat quomodo, magnitudine, & positione datis transuerso latere, aut diametro AF, & vna applicatarum CD, per terminos, A, C, F, D, Ellipsis describi possit.

THEOR. XXIX. PROP. LIIX.

Si coni-sectionem, vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingant, ipsæ productæ conuenient simul extra sectionem; sed in Parabola, vel Hyperbola sibi ipsis occurrent ad partes peripheriæ à contactibus terminatę: In Ellipsi verò ad partes sui ipsius portionis à linea tactus iungente abscissæ, in qua centrum nō reperitur.

ESto Parabole, vel Hyperbole ABC (nam de circulo, & Ellipsi id ab Apollonio ostensum fuit in vigesima septima secūdi conicorum) quàm in punctis A, C tangant rectæ AD, CE.



Dico, si producantur ad partes sectionis ABC à contactibus A, C terminatæ ipsas inter se conuenire.

Si enim per alterum contactuum, vt per C, intelligatur sectionis diameter HCG, certum [b] est contingentem AD, si producatur, cum diametro HG extra sectionem conuenire, hoc est ad partes G; si ergo AD secat CG, necessariò secabit priùs tangentem CE, quæ cadit inter sectionis peripheriam ABC, & diametrum HC: quare tangentes AD, CE sibi ipsis occurrunt, Quod erat, &c.

[b] 24. 25. pr. conic.

ALITER.

CVm recta CE sectioni occurrat, & producta ex vtraque parte extra sectionem cadat, si ex puncto A, quod est in sectione, ducta sit AF, ipsi EC æquidistans, producta ex vtraque parte sectioni [c] occurret; sed AD tota cadit extra sectionem, cum sit contingens; quare AD non congruit cum AF, sed ipsę se mutuò secant. Cum ergo DA secet alteram æquidistantium AF, si producatur, secabit, & reliquam CE ad partes peripheriæ ABC à contactibus A, C, terminatæ. Quod demonstrandum erat.

[c] 18. primi conic.

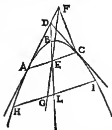
THEO-

THEOR. XXX. PROP. LIX.

Si coni-ſectionem, vel circuli circumferentiam recta linea contingat conueniens cum diametro, cui à tactu ſit ordinatim applicata vſque ad ſectionem, recta linea iungens alterum terminum applicatæ, & occurſum tangentis cum diametro, erit eidem ſectioni ad alteram diametri partem contingens.

SIt coni-ſectio quæcunque, vel circuli circumferentia ABC, cuius diameter ſit DE, & ſit quæpiam AD ſectionem contingens in A, diametro occurrens in D, & ex contactu A ducta ſit in ſectione diametro DE ordinatim applicata AC, dico iunctam DC ſectionem quoque contingere.

Si enim poſſibile eſt, quæ ex C ducitur contingens, non ſit CD, ſed alia CF, quæ cum tangente AD [a] conueniet, ſed in alio puncto quàm D, vt in F. a 58. h.



Iam cum FA, FC ſectionem contingant, & per contactus ducta ſit AC, quæ bifariam ſecta eſt à diametro DE in E, ſi iungatur FEG ipſa [b] erit ſectionis diameter, hoc eſt bifariam ſecabit quamlibet aliã HI ipſi AC æquidiſtanter ductam, vt in G, ſed DEL quoque bifariam ſecat eandem HI in L, cum DEL ſit diameter, per hypoteſim; ergo eadem recta HI in duobus diuerſis punctis G, & L bifariam diuiditur: quod eſt abſurdum. Non eſt ergo ex C alia contingens linea quàm CD. Quod erat, b 29. ſecundi conic.

Cum Propoſitionum 13. ac 14. ſept. Pappi, in hac noſtra tractatione frequens ſit vſus, liceat hic [illegible] eas transferre, vtranque ſimul ſequenti Theoremate demonſtrare.

THEOR. XXXI. PROP. LX.

Rectangulorum ſub partibus datæ rectę terminatæ MAXIMVM eſt id, quod ab æqualibus ſegmentis producitur; reliquorum verò id, quod fit à partibus minus inæqualibus, maius eſt eo, quod ab inæqualioribus continetur.

SIt data recta linea AB terminata bifariam ſecta in C, & non bifariam vtcunque in D, E, &c. Dico, &c.

Cum enim recta AB ſecta ſit bifariam in C, & non bifariam in D, erit quadratum AC, ſiue rectangulum ACB, æquale rectangulo ADB, vna cum

cum quadrato intermediæ partis DC; rectangulum ergo ACB superat rectangulum ADB; & hoc semper; ergo rectangulum ACB, sub æqualibus partibus compræhensum, est *MAXIMVM*. Quod primò, &c.

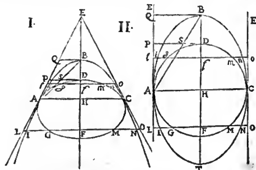
Item, quadrato dimidiæ AC æquatur rectangulum ADB, vna cum quadrato DC, & eidem quadrato AC æquatur rectangulum AED vna cum quadrato EC, ergo rectangulum ADC cum quadrato DC, æquale erit rectangulo AEB, cum quadrato EC, est autem quadratum DC minus quadrato EC, cum sit linea DC minor EC, ex hypotesi; ergo rectangulum ADC maius erit rectangulo AEB. Quod secundò, &c.



THEOR. XXXII. PROP. LXI.

Si fuerint duæ quæcunque coni-sectiones, non excepto circulo, eiusdem, vel diuersi nominis per diuersos vertices simul adscriptæ, quæ in eiusdem communis ordinatim ductæ extremis punctis simul conueniant, è quorum altero eadem recta linea vtranque sectionem contingat, ea coni-sectio cuius vertex cadit infra verticem alterius erit alteri inscripta, & in ijsdem tantùm applicatæ extremis se contingent.

Sint duæ quælibet coni-sectiones ABC, ADC non excepto circulo, eiusdem, vel diuersi nominis per diuersos vertices B, D simul adscriptæ,



quarum communis diameter sit BH, communisq; applicata sit AC, in cuius extremis A, C, sectiones simul occurrant, & ex eorum altero veluti ex A recta

recta AE vtranque sectionem contingat. Dico sectionem ADC, cuius vertex D est infra alterius verticem B, totam cadere intra sectionem ABC, hoc est ei esse inscriptam, & in extremis A, C, se mutuò contingere.

Nam producta AE vsque ad occursum cum diametro in E (si tamen applicata AC non fuerit diameter circuli, vel Ellipsis, vt secunda figura, quo in casu contingentes AE, CE sibi ipsis, & coniugatæ diametro BT [a] æquidistabunt) iungatur ECO, quæ item vtranque sectionem [b] continget in C: & applicetur quæcunque LO. *lo* easdem sectiones secans in I, N, G, M. *i*, *n*, *g*, *m*, contingentes verò in L, O. *l*, *o*; ducanturque ex verticibus tangentes BQ, DP, quę ordinatim ductis æquidistabunt, & iungatur AB, secans DP in S.

[a 27. sec. conic. & 6. eiusd.]
[b 59. h.]

Iam cum sit AH æqualis HC, erit LF. *lf* æqualis FO. *fo*, estque IF. *if* æqualis FN. *fn*, & GF. *gf*, ipsi FM. *fm* (sunt enim sectionum semi-applicatæ) quare reliquæ LI. *li*, ON. *on*, æquales erunt, itemque LG. *lg*, OM. *om* inter se æquales, ideoque rectangulum OIL. *oil* æquabitur rectangulo NLI. *nli*, & rectangulum OGL. *ogl* rectangulo MLG. *mlg*. Et cum in sectione ABC sit [c] quadratum BQ ad quadratum QA, hoc est quadratum SP ad PA, vt rectangulum NLI. *nli* ad quadratum LA. *lA*, & in sectione ADC quadratum DP ad idem PA [d] sit vt rectangulum MLG. *mlg* ad idem quadratum LA. *lA*, habeatque quadratum SP ad PA minorem rationem quàm DP quadratum, ad idem quadratum PA, habebit quoque rectangulum NLI. *nli* ad quadratum LA. *lA* minorem rationem quàm rectangulum MLG. *mlg* ad idem quadratum LA. *lA*; quare rectangulum NLI. *nli*, hoc est OIL. *oil*, minus est rectangulo MLG. *mlg*, siue rectangulo OGL. *ogl*; vnde punctum I remotius [e] est ab ipso F quàm pūctum G. *g*, sed I. *i* est in ipsa sectione ABC; quare punctum G. *g* sectionis ADC cadet intra ABC, & sic de quolibet alio puncto sectionis SADCT, præter A, C: vnde ipsa ADC inscripta erit sectioni ABC, & in punctis tantùm A, C extremis eiusdem applicatæ se mutuò contingent. Quod erat demonstrandum.

[c 16. tertij conic.]
[d ibidem.]
[e conuers. 60. h.]

THEOR. XXXIII. PROP. LXII.

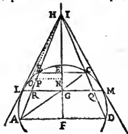
Si extrema inæqualium basium mensalis, cuiuscunque coni-sectionis, vel circuli, ad vtranque diametri partem rectis lineis iungantur, ipsæ simul, & in eodem diametri puncto conuenient, à quo, si ad terminos ordinatim ductæ per intersectionem diagonalis cum diametro, ducantur aliæ rectæ lineæ, hæ omnino sectionem contingent,

Sit mensalis coni-sectionis, vel circuli ABCD, cuius basis, AD maior, BC minor, diameter EF. Dico si iungantur AB, DC, ipsas cum diametro, & in eodem puncto conuenire, ac ducta diagonali AC secante diametrum in G, & applicata LGM, si per extrema puncta L, M, ad prędictum occursum ducantur rectæ, ipsas sectionem contingere.

Cum sit enim AF maior BE, & ipsi parallela, occurret AB cum FE ad partes B, E, vt in H; itemq; DC cum eadem FE, vt in I, vtraque verò [a] extra sectio-

[a 22. primi conic.]

ctionem, & cum sit FH ad HE, vt FA ad EB, vel vt FD ad EC, vel vt FI ad IE, erit diuidendo FE ad EH, vt FE ad EI, quare EH, & EI sunt æquales hoc est productę AB, DC in eodem puncto H cum diametro conueniunt, & si sectio fuerit Hyperbole [a] infra angulum ab asymptotis factum; ideoque ex H duci poterunt Hyperbolen contingentes.



a 35. sec. conic.

Iam, si ductæ HL, HM sectionem non contingant, ducatur ex H contingens HO ad aliud punctũ quàm L, vt ad O, & per O applicetur OPN; erit [b] ergo AP ad PB, vt AH ad HB, sed AH ad HB, est vt AF ad BE, vel ad EC, vel vt FG ad GE (ob similitudinem triangulorum AFG, CEG) vel vt AR ad RB, ergo AP ad PB erit vt AR ad RB: quod est falsum. Non ergo contingens ex H ad aliud punctum peruenit quàm L, & sic non ad aliud quàm M. Quare iunctæ HL, HM sectionem contingunt. Quod erat, &c.

b 37. tertij conic.

SCHOLIVM.

Hinc est, quod si circa diametrum rectilineæ, vel conicæ mensalis tanquam circa transuersum latus, & per extrema applicatæ, quæ per punctum inter sectionis diagonalis eiusdem mensalis cum diametro, ordinatim ducitur, Ellipsis describatur, ipsa, mensalis latera in eiusdem applicatæ extremis omnino continget, nempe ei erit inscripta.

Nam pro rectilinea mensali ABCD, & pro ALBCMD coni-sectionis, vel circuli cuius basis AD, maior sit basi BC, ostendimus AH ad HB esse vt AR ad RB, ergo & FH ad HE erit vt FG ad GE, vnde Ellipsis, quæ describitur cum transuerso EF, & applicata RQ, vel LM à rectis HA, HD in [c] punctis R, Q, vel à rectis HL, HM in punctis L, M contingetur; sed ipsæ HL, HM, vti nuper ostendimus in ijsdem punctis sectionem quoque contingunt: quare huiusmodi Ellipsis, & mensalem rectilineam, & conicam ALBCMD [d] in ijsdem applicatæ extremis contiget, ac ipsi mensali, erit inscripta, cum etiam AD, BC ex diametri terminis F, E ordinatim ductis æquidistantes eandem Ellipsim contingant.

c 4 huius.

d 61. h.

At pro mensali coni-sectionis ALBCMD, si ipsa fuerit mensalis Elliptica, vel circularis, cuius opposita latera AD, BC sint æqualia, erunt quoque eorum dimidia AF, EC æqualia, ac ideo etiam FG æqualis GE, hoc est G centrũ erit Ellipsis, quæ per ELFM describitur cum transuerso EF; & applicata LM erit eius diameter coniugata. Vnde quæ per L, & M communi applicatæ EF vtriusque sectionis æquidistantes ducentur [e] vtranque sectionem contingent, quàm contingunt quoque applicatæ AD, DC: quapropter Ellipsis, quæ per E, L, F, Q describitur eidem mensali Ellipticæ, vel circulari [f] erit inscripta.

e 32. primi conic.

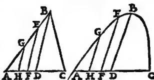
f 61. h.

THEOR. XXXIV. PROP. LXIII.

In quacunque coni-sectione, etiam in triangulo, MAXIMA diametro æquidistantium inter sectionem, & quamcunque ordinatim applicatam interceptarum, est ipsa diameter; aliarum verò ea, quæ propinquior est diametro, maior est remotiori.

ESto triangulum, vt in prima figura, vel circuli, aut Ellipsis, vel Parabolæ, vel tandem Hyperbolæ portio ABC, vt in secunda, quarum diameter sit BD, & ordinatim applicata sit AC, ductisque quotcunque EF, GH, &c. parallelis ad BD. Dico BD esse *MAXIMAM*, diametro reliquarum verò, propinquiorem EF, maiorem esse remotiori.

Nam si concipiatur ex B duci quædam linea ordinatim applicatæ AC æquidistans *a* quæ tota cadet extra sectionem, iungique recta linea puncta E, B *b* quæ tota cadet intra, patet ipsam EB ad alteram partem productam (cum secet in B eam, quæ ducta sit ex B parallela ad AC) conuenire quoque cum CA ad partes A, & sic BD maiorem esse recta EF, siue omnium *MAXIMAM*. Quod primò, &c.



a 17. primi conic.

b 10. pri. conic. & 32. eiusd.

Item si puncta G, E, iungantur recta linea *c* ipsa omnino cum diametro extra sectionem conueniet, ac propterea secabit priùs eam, quæ ex B ducta sit ipsi AC æquidistans; cum ergo GE secet vnam parallelarum, secabit quoque, si producatur, alteram CA ad partes A, & sic EF erit maior ipsa GH. Quod secundò, &c.

c 22. pri. conic. & 23. eiusd.

THEOR. XXXV. PROP. LXIV.

Ellipsium æqualium diametrorum, eidem angulo, vel Parabolæ, vel Hyperbolæ, aut portioni Ellipticæ, vel circulari, quæ non sit maior Ellipsis, vel circuli dimidio, inscriptarum, se mutuò, ac sectionem contingentium, quæ propior est vertici, minor est remotiori,

ESto ABC, vel angulus rectilineus, vel Parabole, vel Hyperbole, aut portio non maior dimidio semi-Ellipsis, vel semi-circuli, cuius vertex B, diameter BD, & circa æqualia ipsius segmenta DE, EF adscriptæ sint dato angulo, vel sectioni Ellipses DVE, ETF, ope diagonalium AG, IL, & applicatarum KHV, NMT, vt in præcedenti Scholio monuimus, quæ anguli latera, vel sectionem contingent in K, V, N, T, eique erunt inscriptæ, & se mutuò contingent in E (cum applicata LEG vtranque sectionem contingat.)

Dico Ellipsim ETF vertici B propiorem, minorem esse Ellipsi DVE ab ipso vertice remotiori.

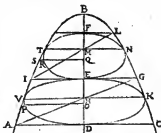
Applicata enim ADC; est DH

a 32. vel 63. huius. ad HE, vt AD, ad EG, sed est a AD maior EG, quare & DH erit maior HE, eademq; ratione EM maior MF, vnde harum Ellipsiũ centra cadent infra H, & M, vt in O, & Q, ex quibus applicatis OP, QR Ellipsium semi-diametris coniugatis, productaque QR vsque ad sectionem in S, cum in

b 63. h. Ellipsi DVE sit OP b maior HV, & in angulo, vel sectione ABC

c 32. h. sit HV c maior QS, & QS maior QR, eò magis OP erit maior QR, & duplum duplo maius, hoc est Ellipsis DVE coniugata diameter, maior coniugata diametro Ellipsis ETF, sed trãsuersa latera ED, EF sunt æqualia, vnde & latus rectum Ellipsis DVE maius recto ETF, suntque huiusmodi Ellipses æqualiter inclinatæ cum eidem sectioni sint simul adscriptæ: quare Ellipsis DVE, maius habens rectum latus,

d 1. Coroll. 19 h. maior erit d ETF minoris recti lateris, quę dati anguli, vel sectionis vertici propior est. Quod erat demonstrandum.

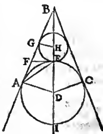


PROBL. XXIV. PROP. LXV.

Per datum punctum in axe dati anguli rectilinei MAXIMVM circulum inscribere: & è contra.

Sit datus angulus rectilineus ABC, cuius axis, siue linea ipsum bifariam secans sit BD, in quo datum sit punctum E, per quod oporteat *MAXIMVM* circulum inscribere.

Ducatur ex E super axim BD perpendicularis EF, cui infra F sumatur FA æqualis, & ex A erigatur AD perpendicularis ad BA, quæ axi occurret in D (cum angulus ABD sit omnino acutus, & BAD rectus, hoc est simul sumpti minores duobus rectis). Dico punctum D esse centrum quæsiti circuli. Nam iuncta AE; cum sint FA, FE inter se æquales, erunt anguli ad basim AE æquales, sed toti FED, FAD æquales sunt, cum sint recti, vnde reliqui DEA, DAE ęquales erũt, siue latus DE ipsi DA æquale. Ductaque DC perpendiculari ad BC; in triangulis DBA, DBC sunt anguli ad B, & ad A, & C æquales inter se, & latus BD commune, ergo, & DC ipsi DA, siue DE, ęqualis erit: quapropter si cum centro D, interuallo DA circulus describatur, ipse per puncta E, & C transibit, eritque angulo ABC inscriptus, cum ob rectos angulos ad A, C ipsius

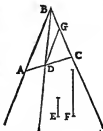


C ipsius latera BA, BC eum contingant; & erit *MAXIMVS*: Nam licet facta supra EF eadem penitùs, constructione nempe sumpta FG æquali ad FE, & ducta GH perpendiculari ad GA, ostendetur pariter H esse centrum alterius circuli dato angulo inscripti, sed is erit minor circulo ex DE, cum ob parallelas GH, AD, sit AB ad BG, vt DA ad HG, sed est AB maior BG, vnde radius DA erit maior radio HG, siue circulus AEC maior circulo ex HE. Iam quilibet alius circulus per E, dato angulo adscriptus, cuius diameter minor sit EI, minor est ipso AEC, & quilibet alius, cuius diameter sit maior ipsa EI, est quidem maior AEC, sed omnino secat dati anguli latera, cum hæc circulum contingant: ex quo circulus ex DE erit *MAXIMVS* inscriptus quæsitus. Quod erat primò, &c.

SI verò ad datum punctum B extra circulum AEC, cuius sit centrum D, sit ei circumscribendus *MINIMVS* angulus rectilineus; iam per se patet angulum ABC, à ductis contingentibus ex B, esse *MINIMVM* quæsitum. Quod vltimò faciendum, ac demonstrandum erat.

LEMMA VII. PROP. LXVI.

In dato angulo, à recta linea per verticem vtcunque secto, lineas applicare, quæ à prædicta diuidantur in data ratione.



SIt datus angulus ABC, vtcunque sectus à recta BD, punctum in eo sit D, ex quo oportet rectam, qualis est ADC, applicare ita vt ipsius partes AD, DC sint in data ratione, veluti E ad F.

Ducatur DG parallela ad alteram linearum, angulum continentium, vt ad AB; & fiat vt E ad F, ita BG ad GC, iungaturque CD, quæ cum BA conueniat in A. Dico factum esse, quod proponebatur.

Et enim, ob parallelas, vt AD ad DC, ita BG ad GC, vel E ad F. Quod, &c.

SCHOLIVM.

SI data ratio E ad F, fuerit ratio æqualitatis, tunc BD, licet præter morem, vocetur dati anguli diameter, & si bifariam, & ad rectos angulos ipsas applicatas secuerit, dicatur axis.



PRO-

PROBL. XXV. PROP. LXVII.

Dato angulo rectilineo, per punctum intra ipsum datum MAXIMAM Parabolen inscribere: & è contra.

SIt datus angulus rectilineus ABC, & datum, intra ipsum, punctum sit D. Oportet per D *MAXIMAM* Parabolen inscribere.

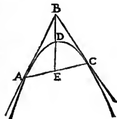
a 66. h. Sumatur DE æqualis DB, & per E in angulo ABC [a] applicetur, recta

b 57. h. AEC, quæ à diametro AE sit bifariam secta in E, & per verticem D circa diametrum ED, & applicatam AC magnitudine, & positione datam [b] describatur Parabole ADC. Dico ipsam esse quæsitam.

c 2. huius. Quoniam cum sint DE, DB æquales, rectæ AB, CB sectionem [c] contingent, vnde Parabole erit dato angulo inscripta; eritque *MAXIMA* quoniam quælibet Parabole per D ipsi ADC adscripta cum recto, quod eius recto sit minus

d 2. Coroll. 19. h. ipsa ADC [d] minor est, quælibet verò adscripta cum recto, quod prædictum excedat licet ea-

e ibidem. dem sit [e] maior, secat tamen latera dati anguli. Quare Parabole ADC est *MAXIMA*. Quod primò, &c.



SI verò data sit Parabole ADC, & extra ipsam datum sit punctum B, per quod ei oporteat *MINIMVM* angulum rectilineum circumscribere. Ducta BE parabolæ diametro, & sumpta DE æquali DB applicataque AEC, iunctisque BA, BC. Erit angulus ABC *MINIMVS* quæsitus,

f 2. huius. vt satis perspicuè patet. Nam cum ipsæ BA, BC sectionem [f] contingant omnes aliæ ex B ductæ minorem angulum dato ABC adscriptum constituentes, sectionem secabunt, quare, &c. Quod vltimò, &c.

MONITVM.



Monendus hic Lector est, quod dum in hoc, & in sequentibus problematibus; dato angulo, per datum punctum adscribitur, vel inscribi, aut circumscribi proponitur, quæsita coni-sectio, vel circulus; & è contra, dum datæ coni-sectioni, vel circulo per datum punctum adscribitur, vel inscribitur, aut circumscribitur quæsitus angulus; id semper à nobis accipi intelligitur in eodem sensu quintæ secundarum definitionum huius, qua in præcedentibus hactenus vsi sumus; nempe lineam, quæ per datum punctum educta diameter est datæ, vel quæsitæ sectionis, esse quoque diametrum dati, vel quæsiti anguli, siue eius vertici occurrere; ita vt quæ in angulo ducuntur æquidistantes ordinatim applicatis coni-sectionis, vel circuli, sint quoque ab eadem sectionis diametro per

datum

datum punctum transeunte bifariam secta, quod à lineis ad anguli verticem non collimantibus consequi minimè posset. Si verò inscriptio, ac circumscriptio alijs conditionibus confici iubeatur, aliæ item definitiones, & constructiones diuersæ ad problematum solutiones requirerentur, quas omnes, licet nobis fortuitò datum sit Geometriæ legibus subijcere, temporis tamen angustijs obsequentes, hic ad omittere necesse fuit; sed aliàs forsan, Deo dante, si quid vnquam ocij nacti fuerimus, hanc ipsam de MAXIMIS, & MINIMIS doctrinam, & duplò, & triplò auctiorem denuò proferemus: Interim varijs stimulis, qui ad hæc edenda nos vrgent, obtemperantes, præsens argumentum absoluere properemus, vt citiùs (alteram huius tractationis partem aggrediendo) ad noua pariter, & apprimè iucunda in conicis accidentia deueniamus, & quod pluris est, præcipuè vtilitatis fundamenta iaciendo, abstrusioris doctrinæ mysteria perspicacioribus ingenijs aperiamus.

PROBL. XXVI. PROP. LXVIII.

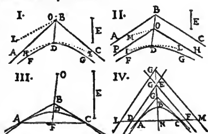
Dato angulo rectilineo, per punctum intra ipsum datum, cum dato semi-transuerso latere, MAXIMAM Hyperbolen inscribere. Item.

Datę Hyperbolæ, per punctum extra ipsam datum, MINIMVM angulum rectilineum circumscribere.

Oportet autem, ad hoc vt anguli circumscriptio fiat iuxta allatam definitionem, ac præcedens monitum, datum punctum, vel esse in centro, vel intra angulos, ab asymptotis constitutos..

SIt, in tribus primis figuris, datus angulus rectilineus ABC, & datum intra ipsum punctum sit D: oportet per D *MAXIMAM* Hyperbolen inscribere, cuius semi-transuersum latus æquale sit dato E.

Iungatur DB, & secetur ex ipsa, DO ęqualis E. Iam, vel DO æqualis est DB, vt in prima figura, vel minor vt in secunda, vel maior vt in tertia. Si primùm, describatur [a] per D, cũ asymptotis BA, BC Hyperbole FDG: & ipsa erit *MAXIMA* quæsita.



[a] 4. sec. conic.

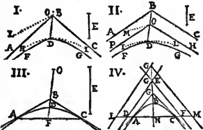
Nam, quæ cum eodem transuerso, eidem angulo per D adscribitur, cum recto, quod minus sit

recto

recto FDG, minor est [a] ipsa FDG, quæ verò cum recto maiori, est quidem maior [b] FDG, qualis est HDI, sed omnino secat latera dati anguli ABC: quoniam ducta BL asymptoto sectionis HDI, ipsa cadet [c] extra BA, sed BH est asymptotos inscriptæ FDG, quare ipsa BH producta secabit Hyperbolen circumscriptam DH, eadem ratione BC secabit DI: quapropter Hyperbole FDG est dato angulo *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod, &c.

a 2. Coroll. 19. h.
b ibidem.
c 37. h.

Si verò data magnitudo E, vel ei æqualis DO, minor fuerit distantia DB inter datum punctum, & dati anguli ABC verticem, vt in secunda figura; ducantur ex O, rectæ OP, OH, asymptotis BA, BC æquidistantes, & intra asymptotos OP, OH describatur [d] per D Hyperbole FDG: & hæc erit *MAXIMA* inscripta quæsita.



d 4. sec. conic.

Quoniam, quæ cum eodem transuerso, sed cum recto minori adscribitur per D, minor est [e] FDG, quæ verò cum recto maiori, qualis est IDL, est quidem [f] maior, sed omnino secat latera dati anguli BA, BC: quoniam ducta OM asymptoto circumscriptæ IDL, cadet [g] extra OP asymptoton inscriptæ FDG, & producta secabit BA, cum secet in O alteram parallelam OP; quare BA producta secabit [h] quidem Hyperbolen DIL: vnde FDG est *MAXIMA* quæsita. Quod, &c.

e 2. Coroll. 19. h.
f ibidem.
g ex 37. h.
h 35. h.

Si tandem DO, quæ ipsi E æqualis est, excedat DB. Fiat vt OB ad OD, ita OD ad OF, & per F applicetur [i] in angulo ABC ordinata AFC, & cũ semi-transuerso OD, per puncta A, D, C, describatur [l] Hyperbole ADC, circa diametri segmentum DF, & applicatam AC, Dico hanc esse *MAXIMAM* quęsitam.

i Schol. 66. h.
l 57. h.

Quoniam, cum sit FO ad OD, vt DO ad OB, erit rectangulum FOB æquale quadrato OD, quare BA, BC Hyperbolen [m] contingent; siue Hyperbole ADC dato angulo ABC erit inscripta; eritque *MAXIMA*; quoniam, quæ cum recto minori [n] cadit intra, quæ verò cum maiori cadit quidem [o] extra ADC, sed necessariò secat dati anguli latera BA, BC, cum sectio Hyperbole in infinitum produci possit, & spacium ABCDA sit vndique clausum: quare ipsa ADC est *MAXIMA* inscripta quæsita, per datum punctum D. Quod primò faciendum, ac demonstrandum erat.

m cõuers. 37. primi conic. à Comand.
n 2. Coroll. 19 h.
o ibidem.

IAM oporteat (in quarta figura) datæ Hyperbolæ ABC, cuius asymptoti ED, EF, per datum extra ipsam punctum G, *MINIMVM* angulum circũscribere.

Itaque, vel datum punctum G congruit cum centro E, vel cadit in angulo asymptotali, vel in eo, qui huic est ad verticem; sic enim semper, quę per G, & centrum E ducitur, tum Hyperbolæ, tum anguli est communis diameter, non autem si datum punctum alibi cadat. Si primùm; ipsæ angulus asymptotalis

ptotalis DEF erit Hyperbolæ circumscriptus, cum totus cadat extra, & quęlibet sectionis diameter, easdem ipsi applicatas, ad latera anguli productas, bifariam *a* fecet: eritque *MINIMVS*, nam quælibet alia linea, quæ per G, vel per E (quod idem est) intra ipsum ducitur, minorem quidem cum altera asymptoto constituit angulum, sed omnino secat *b* Hyperbolen. Si secundum, duci poterunt *c* ex G Hyperbolen contingentes GA, GC, & tunc angulus AGC erit quæsitus circumscriptus: quoniam si iungatur AC, & bifariam secetur in N, iuncta GN *d* diameter est sectionis, simulque anguli; qui erit *MINIMVS*, vt per se patet, cum quæ ex G ducitur intra angulum AGC secet omnino Hyperbolen. Si tertium: ducantur GL, GM asymptotis ęquidistantes, & angulus LGM erit Hyperbolæ ABC circumscriptus, cum circumscriptus sit angulo asymptotali DEF: nam ducta GEN sectionis diametro, applicataque quacunque LDANCFM; in triangulis LGN, MGN est ND ad DL, vt NE ad EG, vel vt NF ad FM, suntq; *e* ND, NF inter se ęquales, quare DL, FM ęquales erunt, & totę NL, NM ęquales, siue GEN circũscripti etiam anguli LGM diameter erit: insuper idem angulus LGM erit *MINIMVS*; nam recta, quę ex G intra ipsum ducitur, minorem angulum cum altera nunc ductarum constituens, si producatur, secat vnam asymptoton (cum ei æquidistanter ductam secet in G) quare vlteriùs producta secabit *f* ipsam Hyperbolen. Datę igitur Hyperbolę per datum extra ipsam pũctum in locis possibilibus, circumscriptus est *MINIMVS* quæsitus angulus. Quod, &c.

a ex 8. 2. conic.
b 8. huius.
c 49. sec. conic.
d 29. sec. conic.
e ex 8. 2. conic.
f 35. h.

PROBL. XXVII. PROP. LXIX.

Datę Hyperbolę, per punctum intra ipsam datum, MAXIMVM angulum inscribere. Item.

Dato angulo, per punctum extra ipsum datum, cum dato semitransuerso latere, MINIMAM Hyperbolen circumscribere.

Oportet autem datum punctum esse in angulo, qui est ad verticem dato,

Sit data Hyperbole ABC, cuius asymptoti sint DE, DF, & punctum intra ipsam sit G, per quod ei oporteat *MAXIMVM* angulum inscribere. Ducantur ex G rectæ GH, GI asymptotis æquidistantes. Dico angulum HGI esse *MAXIMVM* quæsitum.

Nam iuncta DG, & producta ad L, ipsa GL necessariò diuidet angulum HGI (vt satis patet) sumptoque in ea quolibet puncto L, & applicata in Hyperbola, ad diametrũ BL, ordinata ELF, latera anguli HGI secãt in H, I; erit ob triangulorum similitudinem, DL ad LE, vt GL ad LH, sed DL ad LE est vt DL ad LF, cum LE, LF sint æquales, & DL ad LF est vt GL ad LI, quare GL ad LH erit vt GL ad LI, siue LH ęqualis LI: vnde

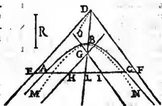
BGL erit diameter, tum datæ Hyperbolæ, tum descripti anguli; & cum GH, GI, per punctum G, in Hyperbola sumptum, ductæ sint asymptotis æquidistantes, ipsæ, ad partes B productæ, Hyperbolæ occurrent, cum asymptotos secent, sed ad partes H, I, nunquam cum sectione conuenient, a at quæcunque ducatur ex G extra angulum HGI, secabit producta alteram asympton (cum secet in G ipsi parallelam GH) ac ideo priùs Hyperbolen datam: est igitur HGI *MAXIMVS* inscriptus angnlus, vti quærebatur. Quod primò erat, &c.

a Coroll. 11. huius.

IAM sit datus angulus HGI, & datum punctum sit B, in angulo tamen, qui ei est ad verticem: oportet per B *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere, cum dato semi-transuerso R.

Iungatur GB, & producatur, sumaturque BD æqualis R; & per D agantur DE, DF, ipsis GH, GI parallelæ, & per B cum asymptotis DE, DF describatur b Hyperbole ABC, Dico hanc esse *MINIMAM* circumscriptam quæsitam.

b 4. sec. conic.



Nam eadem ratione, vt supra, ostendetur DBGL esse diametrum sectionis, & dati anguli, & rectas GH, GI, ad partes H, I productas (cum asymptotis æquidistent) nunquam cum sectione conuenire; ideoque Hyperbolen ABC dato angulo esse circũscriptam: sed est quoque *MINIMA*, quoniam, quæ cum eodem transuerso adscribitur, sed cum recto maiori, c maior est ipsa ABC; quæ verò cum recto minori, qualis est MBN, est quidem d minor ABC, sed omnino secat latera dati anguli: quoniam ducta DO, quæ sit asymptotos inscriptæ MBN, ipsa cadet e infra DE, sed eam secat in D, quare producta, alteram parallelam secabit GH, sed DO tota cadit extra BM, vnde occursus DO cum GH erit extra BM; siue GH necessariò secabit priùs sectionem BM. Est igitur sectio MBN *MINIMA* circumscripta quæsita dato angulo HGI, per datum punctum B, & cum dato semi-transuerso R. Quod vltimò faciendum erat.

c 2. Coroll. 19. h.
d ibidem.
e ex 37. h.

PROBL. XXVIII. PROP. LXX.

Dato angulo rectilineo, per punctum intra ipsum datum, cum dato transuerso latere, MAXIMAM Ellipsim inscribere: & è contra.

SIt datus angulus ABC; & punctum intra ipsum sit D, per quod ei oporteat, cum dato transuerso R, *MAXIMAM* Ellipsim inscribere.

a 66. h.

Sumatur DE ęqualis R, & per D, & E in angulo ABC applicentur a FDG, HEL, & iungatur HG diametrum secans in M, per quod applicetur AMD, & circa diametrum DE, ac per terminos applicatæ AC, describatur b Ellipsis DAEC. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam. Quoniam, ipsa ADCE est mensali HFGL, siue dato angulo c inscripta, & quælibet alia Ellipsis eidem angu-

b Coroll. 57. h.
c Schol. 62. h.

angulo per D adſcripta,cum eodem tranſuerſo latere DE, ſed cum recto, quod minus ſit recto adſcriptæ DAEC, eſt ipſa [a] minor, adſcripta verò cum recto maiori, eſt quidem maior eadem, ſed omnino ſecat anguli latera BA, BC, vt ſatis conſtat. Ampliùs, Ellipſis, quæ per D ſupra applicatam FG eidem angulo contingenter inſcribitur, cum tranſuerſo latere æquali ipſo DE, vel dato R (ſi tamen interceptum diametri ſegmentum DB maius fuerit DE) eſt omnino [b] minor prædicta ADCE: quare ipſa eſt *MAXIMA* inſcripta quæſita. Quod erat,&c.

[a] 2. Coroll. 19. h.

[b] 64. h.

Notandum eſt autem, quod ſi ABC fuerit quælibet coni-ſectio, vel circulus, eadem penitùs conſtructione, ac demonſtratione inſcribetur ei *MAXIMA* Ellipſis ADCE, cum dato tranſuerſo R, quod tamen in Ellipſi, vel circulo, non excedat maius diametri ſegmentum.

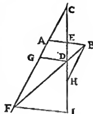
SI verò data ſit Ellipſis ADCE, & per punctum B extra ipſam datum circumſcribendus ſit ei *MINIMVS* angulus rectilineus. [c] Ducantur ex B Ellipſim contingentes BA, BC; nam angulus ABC erit *MINIMVS* circumſcriptus quæſitus: quoniam ducta AC, ac bifariam ſecta in M, iunctaque BME, ipſa [d] erit Ellipſis diameter, ſimulque dati anguli ABC, cum omnes ipſi AC æquidiſtanter ductæ ab eadem BM bifariam ſecentur: vnde angulus ABC erit datæ Ellipſi ADCE circumſcriptus: eritque *MINIMVS*; quoniam quæcunque recta, quæ ex B intra angulum ABC ducitur, cum altera contingentium minorem angulum conſtituens, neceſſariò ſecat datam Ellipſim ADC: quare angulus ABC eſt *MIMIMVS* circũſcriptus quæſitus. Quod,&c.

[c] 49. sec. conic.

[d] 29. sec. conic.

LEMMA VIII. PROP. LXXI.

Si duæ rectæ AB, CD ſe mutuò ſecent in E, ſitque AE æqualis EB, ſed CE maior ED, dico iunctas CA, BD, ſi producantur, conuenire ſimul ad partes A, D, vt in F, & ſi per D ducatur DG parallela ad AE, eſſe FC ad CA, vt FG ad GA.



SVmpta enim EH æquali ipſi EC, erit EH maior ED, & iuncta BH, in triangulis BEH, AEC erunt latera circùm æquales angulos ad E, æqualia: quare reliqui anguli EBH, EAC æquales, vnde BH parallela ad CA, hoc eſt anguli BAG, ABH duobus rectis æquales, ideoque duo BAG, ABD minores duobus rectis: occurrit ergo BD cum CA producta ad partes D, A; ſitque occurſus in F, ex quo ducatur FI parallela ad DG, vel ad AE.

Cum ſint ergo triangula FDI, BDE ſimilia, erit FI ad EB, vel ad AE, hoc eſt FC ad CA, vt FD ad DB, vel vt FG ad GA. Quod erat, &c.

LEMMA IX. PROP. LXXII.

Dato angulo rectilineo ABC, cuius diameter BDE, & applicata ADC: oportet ex C, infra ADC, secantem ducere CEF, ita vt si ex E, & F applicentur EH, FG ipsi ADC parallelæ, quadratum HE ad rectangulum DEG, datam habeant rationem O ad P.

SVmatur Q media proportionalis inter O, & P; & ex D, nisi DA sit diametro BD perpendicularis, erigatur DL, & fiat vt O ad Q, ita DA ad DL, iunctaque BLM, sumatur LM æqualis LD, & per M demittatur ME perpendicularis ipsi BDE: dico per punctum E quæsitam secantem transire.

Nam iuncta MD, ductaque MN ipsi BM perpendiculari cum sint anguli LMN, LDN recti, erũt anguli NMD, NDM duobus rectis minores; quare MN ipsi DE occurret in N; cumque angulus LMD, æqualis sit angulo LDM, erunt residui ex rectis DMN, MDN æquales, hoc est ND æqualis NM, facto igitur centro N, interuallo ND, describatur circulus DMG, qui vtrãque LD, LM, continget in D, M, cum anguli ad D, M sint recti: ducatur tandem EH parallela ad DA.

Iam cum BM circulum DMG contingat in M, sitque ME diametro DG perpendicularis [a] erit GB ad BD, vt GE ad ED, & permutando BG ad GE, vt BD ad DE, sed est BG maior GE, ergo & BD maior DE, estque AD æqualis DC, & anguli ad verticem D æquales, quare iunctæ BA, CE, productę, conuenient simul ad partes A, E, vt in F [b] critque FB ad BA, vt FH ad HA, & permutando BF ad FH, vt BA ad AH, vel vt BD ad DE, vel vt BG ad GE, & diuidendo BH ad HF, vt BE ad EG, quare iuncta FG ipsis EH, DA æquidistabit. Et quoniam est HE ad EB, vt AD ad DB, & BE ad EM, vt BD ad DL (ob triangulorum similitudinem) erit ex æquo HE ad EM, vt AD ad DL, & quadratum HE ad quadratum EM, hoc est ad rectangulum DEG, vt quadratum AD ad DL, vel vt quadratum O ad quadratum Q, vel vt linea O ad P. Quod erat faciendum.

[a] 36. primi conic.

[b] 71. h.

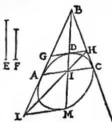
PRO-

PROBL. XXIX. PROP. LXXIII.

Dato angulo rectilineo, per punctum in qualibet eius diametro datum, MAXIMAM Ellipsim inscribere, cuius latera datam habeant rationem.

SIt datus angulus ABC, diameter BD, & datum punctum D, per quod oporteat Ellipsim inscribere, cuius transuersum latus ad rectum, datam quamcunque habeat rationem E ad F, & sit *MAXIMA*.

Applicetur per D, [a] ordinatim GDH, & per H ducatur HIL diametrum secans in I, & BA in L, ita vt ex I, & L ductis A I, LM ipsi DH parallelis, rectangulum DIM, ad quadratum AI, rationem [b] habeat E ad F, & cum trãsuerso DM, per extrema applicatæ AC, Ellipsis [c] describatur DAMC. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam. a 66. h. b 72. h. c Coroll. 57. h.

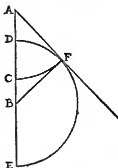


Est enim [d] LB ad BG, siue MB ad BD, vt LA ad AG, siue vt MI ad ID, quare BA, BC Ellipsim [e] contingent, ideoque ipsa erit angulo inscripta, eritque *MAXIMA*, vt in præcedentibus ostensum fuit. Quod erat, &c. d 71. h. e 34. pri. conic.

LEMMA X. PROP. LXXIV.

Datis medijs proportionalibus, Arithmetica nempe, & Geometrica inter easdem ignotas extremas; ipsas extremas inuenire.

SIt AB media arithmetica, & AC media geometrica inter duas easdem ignotas extremas, quarum idem sit terminus A, & simul congruere intelligantur: patet primò AB superare ipsam AC, cum media arithmetica sit maior media geometrica. Iam oporteat datis AC, AB ignotas extremas proportionales inuenire.



Fiat centro A interuallo A C circulus CF, cui ex puncto B contingens ducatur BF, quæ cum radio FA rectum efficiet angulum, vnde subtensa BA erit maior ipsa BF; si ergo cum centro B, interuallo BDF describatur semi- circulus DFE, ipsæ secabit BA infra A, sed tamen vltra C (cum sit BC minor BF, eo quod AC æquatur AF, & tota AB minor est duobus AF, FB) secabitque productam AB in E; quem circu-

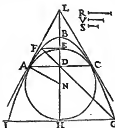
circulum dico in punctis D, E, quæsitum soluere; nempe AE, & AD esse quæsitas extremas. Nam cum sit BD æqualis BE, erit data AB media arithmetica inter inuentas EA, AD. Cumque sit BF radius circuli EFD, & angulus BFA rectus, erit FA ipsi circulo contingens, quare rectangulum EAD æquabitur quadrato AF, siue quadraro AC, vnde data AC erit media geometrica inter easdem inuentas EA, AD. Quare ignotæ extremæ, sunt inuentæ, vti quærebantur. Quod, &c.

PROBL. XXX. PROP. LXXV.

Datæ Parabolæ, per punctum intra ipsam datum, MAXIMAM Ellipsim inscribere, cuius latera datam habeant rationem: & è contra.

Datæ Ellipsi, per punctum extra ipsam datum, MINIMAM Parabolen circumscribere.

Esto data Parabole ABC, & datum intra ipsam punctum sit E; oportet per E *MAXIMAM* Ellipsim inscribere, cuius rectum latus ad transuersum rationem habeat R ad S.



Ducatur ex E Parabolę diameter BED, & applicetur EF, & sumpta V media proportionali inter S, & R; fiat vt R ad V, ita FE ad ED, iunctaque FD, quæ producta

a 27. primi conic. sectioni occurrat *a* in G, ex quo applicata GHI, circa transuersum latus EH, & ter-

b Coroll. 57. h. minos applicatæ AC describatur *b* Ellipsis AECH. Hanc dico esse quæsitam.

c Coroll. 1. 13. h. Cum enim in Parabola *c* sint diametri segmenta BH, BD, BE proportionalia, sintque quadrata applicatarum IH, AD, FE

d 20. primi conic. in eadem ratione *d* ipsorum segmentorum, erunt quoq; ipsæ applicatæ continuæ proportionales, quapropter rectangulum sub IH, vel sub HG, & FE æquabitur quadrato AD, ac proinde quadratum AD, ad rectangulum HDE, erit vt rectangulum sub GH, EF, ad idem rectangulum HDE, sed rectangulum sub GH, EF, ad sibi simile rectangulum HDE, (habeut enim circa rectos angulos latera proportionalia, cum sit GH ad HD, vt FE ad ED, & permutando GH ad FE, vt HD ad DE) est vt quadratum FE ad ED (vtraque enim proportio, duplicata est proportionis lineę FE ad ED) quo circa, & quadratum AD ad rectangulum HDE, hoc est in

e 22. primi conic. Ellipsi, *e* vt rectum latus ad transuersum, erit vt quadratum FE ad ED, vel vt quadratum R ad V, vel vt data linea R ad S. Descripta est ergo Ellipsis

f Schol. 62. h. AECH, cuius latera habent datam rationem R ad S, & est *f* datæ Parabolæ ABC inscripta. Amplius dico, ipsam esse *MAXIMAM* Ellipsium quarum latera sint in ratione R ad S, siue esse *MAXIMAM* sibi similium: nam, quæ cum minoribus lateribus datæ Parabolæ per E adscribitur ad partes H, mi-

nor est;

nor [a] est; quæ verò cum maioribus est quidem [b] maior, sed omnino secat Parabolen ABC, vti ostensum fuit in præcedentibus. Quamobrem Ellipsis AECH, datæ Parabolæ per datum intra ipsam punctum E est *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod primò erat, &c. [a] 5. Coroll. 19. h. [b] ibidem.

IAM sit data Ellipsis AECH, cuius centrum N, & datum extra ipsam punctum sit B, per quod oporteat *MINIMAM* Parabolen circumscribere.

Iungatur BN secans Ellipsim in E, & posita NE media geometrica, & NB media arithmetica inter easdem ignotas extremas, reperiantur [c] ipsæ extremę, quę sint ND, NL, & per D ad Ellipsis diametrum EH applicetur ADC, & per verticem B, circa diametri segmentum BD, & per terminos A, C describatur Parabole ABC. Dico hanc esse *MINIMAM* quæsitam. [c] 74. h.

Cum enim sit NE media geometrica inter LN, ND, erit rectangulum LND æquale quadrato NE; & per D applicata est in Ellipsi recta ADC, si iungantur LA, LC ipsæ Ellipsim contingent [d] in A, C; cumque sit NB media arithmetica inter easdem LN, ND, erunt ipsarum differentiæ LB, BD inter se æquales; vnde eædem LA, LC Parabolen [e] contingent, quocirca hæc datæ Ellipsi erit circumscripta. Eritque *MINIMA*: quoniam quæ per B eidem Ellipsi adscribitur cum recto maiori, maior [f] est ABC, quæ verò cum minori est quidem [g] minor, sed omnino secat Ellipsim, vti ex præcedentibus, & per se satis constat. Quapropter Parabole ABC est *MINIMA* circumscripta quæsita. Quod secundò faciendum, ac demonstrandum erat. [d] 57. h. [e] conuer. 37. primi conic. ex Comand. [f] 2. h. [g] 2. Coroll. 19. h.

COROLL. I.

EX prima parte huius patet, quod si datum punctum D fuerit in axe Parabolæ, & data ratio sit æqualitatis, inscribenda Ellipsis, idem erit, ac circulus; tunc enim applicata ADC erit axi perpendicularis, & quadratum AD æquabitur rectangulo HDE; ideoque AECH erit circulus: ex quo habebitur, quo pacto per punctum E in axe Parabolæ, *MAXIMVS* circulus inscribatur: applicata enim EF, cui sumpta æquali ED, iunctaque FD, & producta in G, & applicata GH, ipsa dabit EH diametrum quæsiti circuli.

COROLL. II.

PAtet etiam semi-applicatas in Parabola, ex terminis diametri *MAXIMI* inscripti circuli, ęquari contiguis segmentis eiusdem diametri, ab applicata ex contactu circuli cum sectione abscissis. Si enim sit FE æqualis ED, ob similitudinem triangulorum, erit etiam GH æqualis HD.

MONITVM.



I quis in vigesimo nono, ac trigesimo antecedenti Problemate, à seueritate geometricæ demonstrationis expeteret, non tantum Ellipses, per datum punctum ibi contingenter inscriptas, ad partes verticis, tum anguli, tum Parabolæ oppositas, MAXIMAS esse sibi ipsis similium per idem punctum, ad easdem partes inscriptarum,

ptarum, sed esse MAXIMAS quoque earum, quæ ad partes verticum inscribuntur; id sequenti Theoremate, in angulo, & qualibet coni-sectione, vel circulo consequetur, simulque dabitur Methodus ipsis inscribendi similes Ellipses, quæ successiuè se mutuò, & anguli, vel sectionum latera contingant.

THEOR. XXXVI. PROP. LXXVI.

Ellipses inscriptæ eidem angulo, vel Parabolæ, vel Hyperbolę, aut portioni Ellipticæ, vel circulari, quæ non excedat Ellipsis, vel circuli dimidium, se mutuò, & anguli latera, vel sectionem, vel circulum contingentes, & quarum diagonales mensalium, quibus inscribuntur, inter se æquidistent, sunt similes, & quæ propior est vertici, minor est remotiori.

SIt ABC, vel angulus rectilineus, vt in prima figura, vel Parabolæ, vel Hyperbolæ, aut portio non maior semi-circuli, vel semi-Ellipsis dimidio, vt in secunda, cuius vertex B, diameter BD, & circa ipsius segmentum DE, inter applicatas AC, IF, ducta diagonali AF, secante diametrum ED in K, & applicata per K recta GKH, per extrema G, E, H, D, [a] describatur Ellipsis GEHD, quæ per Scholium 62. huius, mensali AIFC, hoc est dato angulo, vel sectioni erit inscripta. Et per I ducta IL parallela diagonali AF, diametrum secante in O, consimili constructione, ac supra, describatur in mensali INLF Ellipsis PMQE. Dico primùm has Ellipses inter se similes esse.

[a] Coroll. 57. h.

Nam, in prima figura, proportio rectanguli GKH, ad rectangulum AKF, componitur ex ratione GK ad KA, siue (per triangulorum similitudinem) PO ad OI, & ex ratione HK ad KF, siue QO ad OL, sed etiam proportio rectanguli POQ, IOL, ex ijsdem rationibus componitur, quare in triangulo, rectangulum GKH ad AKF, est vt rectangulum POQ ad IOL.

Iam, in secunda figura, eadem ratione, vt in 64. huius, ostendetur huiusmodi Ellipsium centra cadere infra K, O, nempe in R, S, per quæ si applicentur RT, SV, ipsæ, diagonales secabunt in T, V; in qua cum sit DR æqualis RE, erit AT æqualis TF, ob parallelas; item IV æqualis VL; suntque AF, IL æquidistanter ductæ in sectione, vel circulo, quare iuncta TV erit earundem æquidistantium diameter, quæ producta ad aliud punctum, præter B, sectioni occurret, vt in Z, eritque [b] sectionis, vel circuli diameter: si ergo ex verticibus B, Z, agantur BX, ZX ordinatim applicatis GH, AF æquidistantes, hæ sectionem [c] contingent, & simul [d] conuenient in X; eritque rectangulum GKH ad rectangulum AKF, vt quadratum BX ad quadratum ZX; item erit [e] rectangulum POQ ad IOL, vt idem quadratum BX ad idem ZX, quapropter rectangulum GKH ad AKF, erit vt rectangulum POQ ad IOL, quod etiam superius in prima figura demonstratum fuit. Itaque, cum sit in vtraque, rectangulum GKH ad AKF, vt rectangulum POQ ad IOL, &

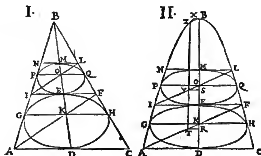
[b] 28. sec. conic.

[c] 17. primi conic.

[d] 59. h.

[e] 17 tertij conic.

rectangulum AKF ad rectangulum DKE, vt quadratum AK ad KD (ob laterum proportionalitatem) vel vt quadratum IO ad OE (ob triangulorum AKD, IOE similitudinem) vel vt rectangulum IOL ad EOM (ob homologorum laterum proportionalitatem) erit, ex æquali, rectangulum GKH, vel quadratum GK ad rectangulum DKE, siue vt rectũ latus Ellipsis GEHD ad eiusdem transuersum, vt rectangulum POQ, siue quadratum PO, ad rectangulum EOM, vel vt rectum Ellipsis PMQE ad ipsius transuersum: cum ergo huiusmodi Ellipses habeant latera proportionalia, sintque æqualiter inclinatæ, erunt [a] inter se similes. Quod erat primò demonstrandum. a 6. sec. defin. h.



Præterea, cum sit AD ad DK, vt IE ad EO, sitque AD maior [b] IE, erit DK maior EO. Item, cum sit FE ad EK, vt LM ad MO, sitque FE maior LM, erit EK maior MO, ergo integra transuersa diameter DE, maior toto transuerso latere EM; sed transuersum DE ad transuersum EM, est vt rectum vnius ad rectum alterius, vt superiùs demonstrauimus, estq; transuersum DE maius EM, quare rectum recto maius erit, siue Ellipsis GEHD maiorum laterum, maior [c] erit Ellipsi PMQE minorum laterum, quæ tùm in angulo, tùm in sectione, aut semi-Ellipsi, vel semi-circulo vertici B propior est. Quod vltimò ostendere propositum fuit. b 32. vel 63. h. c 5. Coroll. 19. h.

SCHOLIVM.

Si ergo in figuris 29. & 30. Problematis, concipiantur methodo superiùs allata, per datum punctum inscribi Ellipses ad partes verticis, vel anguli, vel sectionis, quæ similes sint alijs ad oppositas partes per idem punctum inscriptis (si tamen sectionis, vel circuli portio, quæ ab applicata per datum punctum terminatur, huius Ellipsis sit capax, quod accidet, quando in secunda præcedentium figurarum, diagonalis IL, quæ ex I ducitur diagonali AF æquidistans, & occurrens sectioni in L, punctum L pertingat ad B, vel

Q cadat

cadat inter I, & B; tunc enim in portione IBF, per punctum E, Ellipsis alteri GEHD similis inscribi nũquam poterit, qualis semper inscribi potest in triãgulis IBF, MBL, &c. primæ figuræ; quod omne, vel leuiter intuenti satis patebit) illę omnino his minores erunt, cum verticibus sint propiores; & ob id, quæ ad oppositas partes ibi inscribuntur, erunt quidem *MAXIMAE* quæsitæ.

THEOR. XXXVII. PROP. LXXVII.

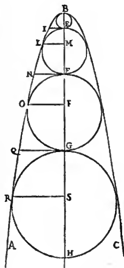
MAXIMI circuli in Parabola inscripti, & à vertice successiuè se mutuò contingentes, sunt inter se in ratione quadratorũ, disparium numerorum ab vnitate incipientium.

Sit Parabole ABC, cuius axis BH, vertex B; & *MAXIMI* circuli in ea inscripti, & à vertice successiuè se mutuò contingentes sint, quorum diametri BE, EF, FG, GH, &c. contactus verò sint, primi vertex B, secundi punctum L, tertij O, quarti R, &c. dico huiusmodi circulos, esse inter se, vt quadrata numerorum disparium ab vnitate incipientium, nempe 1. 9. 25. 49. &c.

Ducantur, tum ex diametrorum terminis E, F, G; tum ex contactibus L, O, R ordinatæ EI, FN, GQ, LM, OP, RS.

Iam cum circulus BE sit *MAXIMVS* inscriptibilium per verticẽ B, [a] erit BE ęqualis recto lateri Parabolę, sed EI est [b] media proportionalis inter EB, & rectum latus, hoc est inter æquales lineas, quare EI æqualis erit ipsi EB, quæ concipiatur, vt vnum; estque EI [c] æqualis EM, ergo EM, est vt 1, & tota BM, vt 2; sed est [d] vt BE ad BM, ita BM ad BF, vel vt 1 ad 2, ita 2, ad 4; erit ergo BF, 4: estque BM, 2; quare FM, siue [e] FN, siue [f] FP erit pariter 2; vnde tota BP erit 6; estque BF ad BP, vel vt 4 ad 6, ita [g] BP ad BG, & vt 4 ad 6, ita 6 ad 9, vnde BG erit 9, sed est BP, 6, ergo GP, siue GQ, vel GS erit 3; quare tota BS, erit 12, sed vt BG ad BS, vel vt 9 ad 12; ita BS ad BH, & vt 9 ad 12, ita 12 ad 16, quare BH, erit 16. Si ergo dum BE est, vt 1, BF est 4, BG, 9, & BH, 16; ipsa BE cum earum differentijs EF, FG, GH, erunt, vt sunt numeri 1, 3, 5, 7, qui sunt numeri impares ab vnitate incipientes, sed circuli sunt, vt quadrata suorum diametrorum, ipsæque BF, EF, FG, GH sunt inscriptorum circulorum diametri, quare hi *MAXI-*

[a] 1. Coroll. 20. h.
[b] Coroll. 1. h.
[c] 2. Coroll. 75. h.
[d] 1. Coroll. 13. h.
[e] 2. Coroll. 75. h.
[f] ibidem.
[g] 1. Coroll. 13. h.



MI cir-

MI circuli, erunt, vt quadrata eorumdem numerorum disparium ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

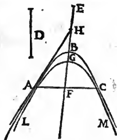
PROBL. XXXI. PROP. LXXVIII.

Datæ Hyperbolę, per punctum intra ipsam datum MAXIMAM Parabolen inscribere; & è contra.

Datæ Parabolæ, per punctum extra ipsam datum cum dato semi-transuerso latere MINIMAM Hyperbolen circumscribere.

SIt data Hyperbole ABC, cuius centrum E, & punctum intra ipsam datum sit G. Oportet per G *MAXIMAM* Parabolen inscribere.

Iungatur EG secans Hyperbolen in B, & concipiatur EG esse mediam arithmeticam, EB verò mediam geometricam inter easdem ignotas extremas, quæ reperiantur, [a] & sint EH, EF, & per F applicetur AFC, & circa diametrum GF adscribatur [b] ipsi Hyperbolæ ABC, Parabole DAGCM, quarum communis applicata sit AC. Dico ipsam Parabolen esse quæsitam. a 74. h. b 57. h.



Cum enim sit FE ad EB, vt EB ad EH, erit rectangulum FEH æquale quadrato EB, quare AH Hyperbolen [c] continget. Cumque sit EG media arithmetica inter FE, EH, erunt ipsarum differentiæ FG, GH æquales, vnde eadem AH Parabolen quoque [d] continget: quare Parabole D G M Hyperbolæ ABC [e] erit inscripta. Quod autem sit *MAXIMA*, patet; cum quælibet alia per G adscripta cum recto minori, minor est AGC, quę verò cum maiori, est quidem maior, sed omninò secat Hyperbolen ABC, cum sectio Parabole in infinitum abeat, & superficies ABCGA vndique sit clausa. Quod primò, &c. c conuerſ. 37. primi conic. Comand. d 2. h. e 61. h.

IAM sit data Parabole AGC, & datum extra ipsam pũctum sit B, per quod oporteat, cum dato quolibet semi-transuerso D, *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere.

Ducatur per B diameter Parabolæ DGF, quæ vltra B producatur, sumaturque BE ipsi D æqualis, & facta EB media geometrica, & EG media arithmetica inter easdem ignotas extremas, reperiantur [f] ipsæ extremæ, quæ sint EH, EF; & per F applicetur in Parabola AFC; & super AC ad diametri segmentum BF, cum semi-transuerso BE describatur [g] Hyperbole ABC. Dico ipsam esse *MINIMAM* quæsitam. f 74. h. g 57. h.

Si quidem iuncta HA, ijsdem omnino argumentis, ac supra, demonstrabitur ipsam HA, & Parabolen, & Hyperbolen contingere, vnde sectiones se mutuò contingent, [h] & Hyperbole ABC erit Parabolæ circumscripta: eritque *MINIMA*; nam quælibet alia Hyperbole per B adscripta cum eodem transuerso, sed cum recto maiori, maior est ipsa ABC, quæ verò cum minori, est quidem minor, sed cum ipsi ABC sit inscripta, & ad partes verti- h 61. h.

ci oppositas, sit infinitæ extensionis, secaret omnino Parabolen AGC, vt per se patet: quapropter Hyperbole ABC erit *MINIMA* circumscripta quęsita. Quod secundò faciendum, ac demonstrandum erat.

MONITVM.

HAEC de MAXIMARVM, & MINIMARVM coni-sectionum, circuli, & anguli reciproca inscriptione, ac circumscriptione, per punctum in ipsis, vel intra, vel extra datum, iuxta sæpius memoratam definitionem, hactenus pertractasse sufficiat, quæ si grata vobis fuisse perceperimus, multa his similia, & alia quàm plurima ad aliud tempus proferemus. Cæterum, in proximè sequentibus, quæ ad vberiorem doctrinam, & alteri præsertim huius operis parti maximè conducunt, hac omissa definitione, inscriptio, & circumscriptio aliter fiet, prout in ipsis propositionibus exponetur.

LEMMA XI. PROP. LXXIX.

Si recta AB secta fuerit in C, & in D, ita vt AB ad BC, sit vt AD ad DC: Dico si BD bifariam secetur in E, punctum E cadere inter B, & C, & rectangulum AEC, æquari quadrato ED.

CVm sit enim AB ad BC, vt AD ad DC, erit permutando BA ad AD, vt BC ad CD, sed est BA maior AD, quare BC erit maior CD: ex quo punctum E bifariam secans BD cadit inter B, & C.

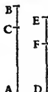
Ampliùs producatur BA ad F, & secetur AF æqualis AD.

Iam cum demonstratum sit esse BA ad AD, vt BC ad CD, erit BA ad AF, vt BC ad CD; & componendo BF ad FA, vt BD ad DC; & sumptis antecedentium dimidijs, EA ad AF, siue ad AD, vt ED ad DC, & per conuersionem rationis, AE ad ED, vt DE ad EC, vnde rectãgulum AEC ęquabitur quadrato ED. Quod erat, &c.



LEMMA XII. PROP. LXXX.

Si fuerit rectangulum ABC, æquale rectangulo DEF, sitque AC maior DF, erit BC minor EF.

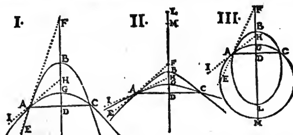


Si enim dicatur BC æqualem, vel maiorem esse EF, cum sit data AC maior DF, esset omnino AB maior DE, & BC dicitur æqualis, vel maior EF, ergo rectangulum ABC esset omnino maius rectangulo DEF, sed æquale positum fuit. Ergo patet propositum.

THEOR. XXXVIII. PROP. LXXXI.

Si recta linea ad alterũ terminũ cuiusdam applicatæ coni-sectionem, vel circulũ cõtingat, ipsa omnino secabit sibi adscriptã eiusdẽ nominis sectionẽ circa eandẽ applicatam, & cum æquali transuersa diametro, si sectiones fuerint Hyperbolæ, vel Ellipses, aut circuli.

Esto quæcunque coni-sectio, vel circulus ABC, cuius diameter BD, et vna applicatarum sit AC, & ad ipsius terminum A, sit recta contingens EAF, quæ diametro occurret a in F; & sumpto in diametri segmento BD quolibet puncto G, cum diametro GD, & applicata AC in qualibet figura, a 24. 25. pr. conic.



sed etiam, pro Hyperbola in secunda, & pro Ellipsi, vel circulo, in tertia, cum dato transuerso latere GM, quod æquale sit transuerso BL datæ sectionis, describatur b eiusdem nominis sectio AGC: dico hanc omnino secari à contingente EAF. b 57. h.

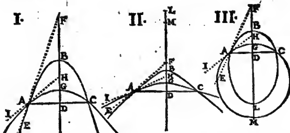
Ducatur enim per A recta IAH, quæ sectionem contingat AGC, cum eius diametro conueniat in H.

Iam in prima figura exhibente Parabolas, cum AF contingat sectionem ABC,

a 35. pri. conic. b ibidem. ABC, erit DB æqualis a BF; cumque AH contingat AGC erit DG b æqualis GH, sed est DB maior DG ex constructione, quare, & BF erit maior GH, & GF eò maior GH: quod memento.

Præterea, in secunda figura, cum sit LB, æqualis MG, & BD maior GD, ex constructione, habebit LB ad BD minorem rationem, quàm MG ad GD, & componendo LD ad DB, siue c LF ad FB minorem quàm MD ad DG, siue d quàm MH ad HG, & iterum componendo LB ad BF, minorem quàm MG ad GH, sed est LB æqualis MG, quare BF erit maior GH, & eò magis GF maior GH.

c 36. primi conic. d ibidem.



In tertia denique, cum sit LB æqualis MG, & DB maior DG, ex constructione, habebit LB ad BD minorem rationem, quàm MG ad GD, & diuidendo LD ad DB siue e LF ad FB, minorem quàm MD ad DG, vel f quàm MH ad HG, & diuidendo iterum, LB ad BF minorem rationem, quàm MG ad GH, sed est LB æqualis MG, ergo BF maior erit GH, & eò magis GF maior GH.

e 36. primi conic. f ibidem.

Itaque cum demonstratum sit in qualibet figura esse GF maiorem GH, punctum H incidet infra F; sed HAI contingit sectionem AGC in A, quare FA, quæ contingit ABC, si producatur ad partes E, secabit ipsam sectionem ABC, cum inter sectionem, & contingentem, ex puncto contactus altera recta linea non g cadat: quare, &c. Quod erat, &c.

g 32. primi conic.

PROBL. XXXII. PROP. LXXXII.

Dato angulo rectilineo, vel coni-sectione, vel circulo, per terminos, cuiuscunque in ipso applicatæ, MAXIMAM Ellipsim inscribere, cuius transuersum latus æquale sit dato.

Oportet autem, si data sectio fuerit Ellipsis, datum transuersum minus esse diametro datæ Ellipsis, ad quam data applicata ordinatim ducitur.

ESto ABC datus angulus, vt in prima figura; vel Parabole, vt in secunda; vel Hyperbole, vt in tertia; vel tandem Ellipsis, aut circulus, vt in quarta.

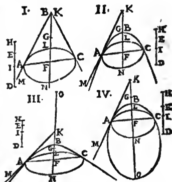
quarta, & in ipsis concipiatur quædam AC ad diametrum BF ordinatim ducta; oportet per eius terminos A, C, dato angulo, vel sectioni, *MAXIMAM* Ellipsim inscribere, cuius transuersa diameter æqualis sit datæ lineæ DE, quæ tamen, pro Ellipsi ABCO, quartæ figuræ, minor sit eius transuersa diametro BO.

Ducatur [a] ex A, sectionem ABC contingens AK, quæ diametro occurret [b] in K, & KF, in angulo etiam rectilineo, bifariam secetur in puncto G, quod in Parabola cadet in ipso B, cum (ob tangentem AK) sit KB [c] æqualis BF, & in Hyperbola cadet infra B, cum sit FB maior BK (sumpta enim eius transuersa diametro BO, est OF ad FB, [d] vt OK ad KB, & permutando OF ad OK, vt FB ad BK, sed est OF maior OK, quare, & FB erit maior BK) in Ellipsi verò cadet supra B, cũ sit KB maior BF (nam est OK ad KB, [e] vt OF ad FB, & KF bifariam secta est in G, ac ideo G cadet supra B.) Præterea ad datam rectam DE applicetur parallelogrammum æquale quadrato GF, excedens figura quadrata, idque sit rectangulum DHE; sumptaque HI media proportionali inter DH, HE, erit rectangulum DHE, siue quadratum GF, æquale quadrato HI, ergo rectæ GF, HI æquales inter se. Insuper sumatur GL æqualis HE, & erit reliqua LF æqualis reliquæ EI; & punctum L cadet omnino infra B, siue intra angulum, vel sectionem, cum in angulo, & Hyperbola cadat infra G, quod est intra angulum, vel sectionem, & in Parabola cadat infra G, quod est in ipsa sectione; in Ellipsi verò, prædictum punctum L cadet infra B; quoniam cum sit OK ad KB, vt OF ad FB, & KF bifariam secta in G, per constructionem, erit rectangulum OGB [f] æquale quadrato GF, (hic notatione dignum videtur, hanc ipsam affectionem verificari etiam in Hyperbola, nempe rectangulum OGB æquari quadrato GF, vel GK) siue quadrato HI; siue rectangulo DHE; sed est OB maior DE, quare GB erit [g] minor HE, siue minor GL, hoc est punctum L erit quoque intra Ellipsim ABCO. Sumatur præterea in quacumque figura FN æqualis ID, erit ergo LN æqualis datæ ED (cum sit quoque LF æqualis EI) & punctum N in quarta figura cadet omnino intra Ellipsim ABCO: quoniam cum sit rectangulum DHE, siue NGL, æquale quadrato HI, siue GF, & sit etiam rectangulum OGB æquale eidem quadrato GF, vt superiùs demonstrauimus, erunt rectangula OGB, NGL inter se æqualia, & ideo, vt OG ad GN, ita LG ad GB, sed est LG maior GB, vt paulò ante ostendimus, quapropter, & OG erit maior GN, siue punctum N cadet intra Ellipsim ABCO.

Tandem cum trãsuerso LN, quod æquatur datę lineæ ED, circa applicatam

[a] 2.4.h.
[b] 24.25. pr. conic.
[c] 35. primi conic.
[d] 36. primi conic.
[e] ibidem.
[f] 79.h.
[g] 80.h.

* Coroll. 37. h. tam AC deſcribatur * Ellipſis ALCN. Dico hanc eſſe *MAXIMAM* inſcriptã quæſitam.



Nam, in qualibet figura, cum ſit rectangulum DHE, ſiue NGL æquale quadrato HI, ſiue GF, erit NG ad GF, vt GF ad GL, & componendo NG cum GF, hoc eſt NK, erit ad GF, vt FG cum GL, ſiue vt KL ad GL, & permutando NK ad KL, vt GF ad GL,
a Coroll. 12. h. vel vt NG ad GF, vel vt a NF ad FL, quæ ſunt differentiæ, trium proportionalium NG, GF, GL;
b 4. h. ergo recta KAM tanget b Ellipſim ALCN, ſiue hæc angulo ABC erit inſcripta, ſed in alijs figuris, ipſa KAM tangit quoque datã ei ſimul adſcriptam ſectionem ABC, (ex conſtructione) adeõdem terminum cõmunis ap-
c 61. h. plicatæ AC, quapropter Ellipſis ALCN datæ ſectioni, vel circulo c erit inſcripta.

Dico demum hanc eſſe *MAXIMAM*: quoniam quæ ipſi adſcribitur per eoſdem terminos applicatæ AC, & cum tranſuerſa diametro æquali ipſi LN,
d 81. h. *licet minor fuerit eadem ALCN*, ſecat d contingentem KAM, in A, atque aliò ad partes AK, ſi nempe vertex nouiter adſcriptæ cadat ſupra L; vel ad partes AM, ſi cadat infra, vt ex ipſa 81. huius facilè elicitur: cum ergo inouiter adſcripta Ellipſis ſecet contingentem KAM, in ſe ipſam rediens, ſecabit omnino datam ſectionem ABC, quare Ellipſis ALCN, eſt *MAXIMA* dato angulo, vel ſectioni ABC inſcripta, circa datam applicatam, & cum data tranſuerſa diametro DE, immo potiùs ipſa ALCN eſt vnica huiuſmodi conditionibus inſcriptibilius. Quod faciendum, & demonſtrandum erat.

COROLL.

Ex hac conſtat interceptum diametri ſegmentum inter quamlibet applicatam, & verticem, æquale eſſe (in Parabola) intercepto ſegmento eiuſdem diametri inter vertieem, & occurſum contingentis, ductæ ex termino applicatæ, cum diametro: in Hyperbola, verò maius, ſed in Ellipſi, vel circulo minus eſſe.

Demonſtratum eſt enim, in ſecunda figura, KB æqualem eſſe BF, in tertia verò KB, minorem BF, & in quarta KB maiorem BF.



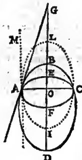
THEO-

THEOR. XXXIX. PROP. LXXXIII.

Si binarum Ellipsium simul adscriptarum altera alteri fuerit inscripta, & per terminos communis applicatæ se mutuò contingant; quælibet alia Ellipsis datis adscripta, cum eadem applicata, & cum æquali transuerso latere, inscriptam Ellipsim omnino secabit.

SInt duæ Ellipses ABCD, AECF simul adscriptæ, circa communem applicatam AC, sitque ipsarum altera, nempe AECF, alteri inscripta, ita vt in extremis tantùm A, C, se mutuò contingant: dico, si his alia adscribatur Ellipsis ALCI, circa eandem applicatam AC, & cum transuerso LI, quod æquale sit ipso BD transuerso circumscriptæ, ipsam ALCI omnino secare inscriptam AECF.

Nam si alterum extremum transuersæ diametri LI, quale est punctum L, cadat intra inscriptam, vt inter E, & O, tunc aliud extremum I necessariò cadet extra, infra F, cum sit LI, siue BD maior EF, ex quo manifestè patet, Ellipsim ALCI secare inscriptam AECF.



Si verò vtrunque extremum L, I, cadit extra inscriptam, vti exhibetur ab hac figura; tunc ducta AG, quæ circumscriptam ABCD contingat in A, ipsa, vtrinque producta, ad alteram partium secabit [a] omnino ALCI; vnde, quæ ex A cõtingit ALCI, diuersa erit ab AG, & sit ipsa AM. [a] 81. h.

Iam si ALCI non secat inscriptã AECF; contingat in A, C, si possibile est. Cum ergo recta AM contingat Ellipsim ALCI, atque hæc contingat inscriptam Ellipsim AECF, eadem recta AM, in A quoque continget AECF, sed etiam AG eandem AECF continget in A: quare ex eodem puncto A ductæ erunt binæ rectę lineę eandem Ellipsim contingentes; quod est [b] impossibile. Non igitur Ellipsis ALCI continget inscriptam AECF, quapropter in occursibus A, C necessariò eam secabit. Quod ostendere propositum fuit. Sed hoc idem [b] ex 32. pr. conic.

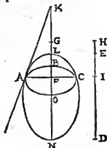
ALITER affirmatiuè.

CVm recta AG contingat ad A circumscriptam Ellipsim ABCD, atque hæc ad idem A contingat inscriptam AECF, ipsa AG omninò continget ad A inscriptam AECF; sed MA (quę vt supra ostendimus, diuersa est à GA) hanc secat in A; quare MA producta, ad alteram partium omninò secabit inscriptam AECF, & eò magis Ellipsis ALCI, quam contingit ad A recta MA, ad eandem partem secabit inscriptam AECF. Quod erat, &c.

PROBL. XXXIII. PROP. LXXXIV.

Datæ Ellipsi, vel circulo, per terminos cuiuscunque in ipso applicatę MINIMAM Ellipsim circumscribere, cuius transuersum latus æquale sit dato, quod tamen maius sit transuersa diametro datæ Ellipsis.

Sit data Ellipsis, vel circulus ABCO, cuius transuersa diameter BO, & quædam ad eam applicata AC: oportet per terminos A, C, cum transuerso DE, quod excedat BO *MINIMAM* Ellipsim circumscribere.



Ducatur ex A contingens AK productæ diametro occurrens in K, & KF bifariam secetur in puncto G, quod cadet inter B, & K, vt in 83. h. ostensum fuit; & ad datam lineam DE applicetur parallelogrammum, æquale quadrato GF, excedens figura quadrata, sitque rectangulum DHE, & sumpta HI media proportionali inter DH, HE, erit rectangulum DHI, siue quadratum GF, ęquale quadrato HI, hoc est linea GF æqualis HI: sumpta ergo GL æquali HE, erit reliqua LF æqualis EI, & punctum L cadet extra B: quoniam cum sit OK ad

a 36. primi conic. KB, a vt AF ad FB, sitque KF bifariam se-
b 79. h. cta in G, erit rectangulum OGB æquale b quadrato GF, siue quadrato HI, siue rectangulo DHE; sed est OB minor DE, ex constructione, quare GB
c 80. h. erit maior c HE, siue maior GL; itaque punctum L cadet extra Ellipsim ABCO. Sumatur amplius FN æqualis ID, & erit tota LN æqualis datæ ED, itemque punctum N cadet extra Ellipsim ABCO: Nam cum sit rectangulum DHE, siue NGL æquale quadrato HI, siue GF, sitque rectangulum OGB, æquale eidem quadrato GF, vt supra ostendimus, erunt rectangula OGB, NGL inter se æqualia, & ideo vt OG ad GN, ita LG ad GB, sed est LG minor GB, vt superius demonstrauimus, vnde, & OG minor erit GN, nempe punctum N cadet extra Ellipsim ABCO. Postremò cum transuerso latere
d Coroll. 57. h. NL, quod æquale est datæ lineæ DE, circa applicatam AC d describatur Ellipsis ALCN. Dico hanc esse *MINIMAM* circumscriptam quæsitam.

Quoniam cum sit rectangulum NGL æquale quadrato GF, erit NG ad GF, vt GF ad GL, & componendo, NG cum GF, siue NK, erit ad GF, vt FG cum GL, siue vt KL ad GL, & permutando NK ad KL, vt GF ad GL,
e Coroll. 12. h. vel vt NG ad GF, vel vt e NF ad FL, ergo recta KAM Ellipsim ALCN con-
f 4. h. tingit f in A, sed eadem KAM contingit quoque ad idem punctum A Elli-
g 61. h. psim ABCO: quapropter Ellipsis ALCN datæ ABCO erit g circumscripta. At ipsa erit *MINIMA*: nam quælibet alia, quæ ipsi adscribitur per eosdem terminos communis applicatæ AC, & cum transuersa diametro æquali ipsi
h 83. h. LN, *licet maior fuerit eadem ALCN*, inscriptam ABCO omnino h secat; ergo

ALCO est

ALCO est *MINIMA* circumſcripta datæ Ellipſi ABCO, per terminos applicatæ AC, cum dato tranſuerſo DE: immo ipſa ALCN vnica eſt, his conditionibus circumſcriptibilis. Quod faciendum, & demonſtrandum erat.

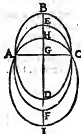
SCHOLIVM.

SI quæratur, qua nam ratione in prop. 82. ad finem, dicatur *licet minor fuerit eadem ALCN* in hac verò, *licet maior fuerit eadem ALCN* (perinde ac ſi, per terminos A, C, cum diametro æquali ipſi LN alia in ea deſcribi poſſit Ellipſis minor ALCN, in hac verò alia maior ALCN) vtrunq; nos haud temerè dixiſſe ex ſequẽti Theoremate manifeſtum fiet, à quo habebitur quamlibet aliam Ellipſim per A, C, adſcriptam, cum tranſuerſo ęquali ipſi LN, ſed cuius ſegmenta ab applicata AC abſciſſa, ſint magis inæqualia quàm ſint ſegmenta NF, FL, minorem eſſe ipſa ALCN; & è contrà, quę cum ſegmentis minus inæqualibus, quàm ſint NF, FL, eadem ALCN maiorem eſſe.

THEOR. XL. PROP. LXXXV.

Ellipſium, per terminos communis applicatæ ſimul adſcriptarum, & quarum tranſuerſa latera ſint æqualia, MINIMA eſt ea, cuius communis ordinatim ducta ſit diameter coniugata: aliarum verò illa, cuius ſegmenta diametri ſunt minùs inæqualia, minor eſt ea, cuius diametri ſegmenta ſunt magis inæqualia.

SInt duę Ellipſes ABCD, AECF, per terminos eiuſdem applicatæ AC ſimul adſcriptæ, & quarum tranſuerſa BD, EF ſint æqualia, ſitq; AGC coniugata diameter Ellipſis ABCD, ſiue G eius centrum. Dico primùm hanc minorem eſſe altera AECF, ſiue eſſe *MINIMAM*, &c.



Etenim, cum ſit DB æqualis EF, & DB bifariam ſecta in G, erit EF in pũcto G inæqualiter ſecta, vnde rectangulum BGD maius erit rectangulo EGF, cum ſit [a] *MAXIMVM*; ideoque rectangulum BGD ad quadratum AG, ſiue tranſuerſum [b] BD ad rectum Ellipſis ABCD, maiorem habebit rationem quàm rectangulum EGF ad idem quadratum AG, ſiue quàm [c] tranſuerſum EF ad rectum Ellipſis AECF: ſed tranſuerſa BD, EF ſunt æqualia, ergo rectũ Ellipſis AB CD, minus erit recto AECF: ſi igitur Ellipſis huiuſmodi Ellipſes (cum ſint ęqualiter inclinatæ) concipiantur eſſe per eundem verticem ſimul adſcriptæ, ita vt tranſuerſæ diametri ſimul congruant, ipſa ABCD, cuius rectum minus eſt, inſcripta erit, [d] ſiue minor AECF, cuius rectum maius eſt, & ſic minor quacũque alia, cuius diametri ſegmenta ſint inæqualia: quare ABCD erit *MINIMA*, &c.

[a] 60. h.

[b] 21. primi conic.

[c] ibidem.

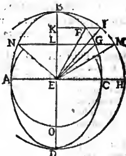
[d] 2. Coroll. 19. h.

Insuper, sit alia adscripta Ellipsis AHCI, cuius segmenta diametri HG, GI sint adhuc magis inæqualia, quàm segmenta EG, GF: dico AECF minorem esse Ellipsi AHCI. Ostendetur enim, vt supra, rectangulum EGF maius esse rectangulo HGI, & rectum latus Ellipsis AECF, minus esse recto AHCI, siue Ellipsim AECF inscribi posse AHCI, hoc est ipsa minorem esse. Quod erat vltimò demonstrandum.

THEOR. XLI. PROP. LXXXVI.

MAXIMA semi-diametrorum, à centro Ellipseos eductarum, est semi-axis maior, MINIMA verò semi-axis minor: aliarum autem, quæ cum MAXIMA minorem constituit angulum maior est: & quatuor sunt in Ellipsi æquales semi-diametri, quarum vna tantùm cadit in vnoquoque Ellipsis quadrante, genito ex axium interfectione.

SIt Ellipsis ABCD, cuius axis maior BD; minor AC, centrum E. Dico primùm maiorem semi-axim EB esse omnium semi-diametrorum *MAXIMAM*, & semi-axim minorem EA omnium *MINIMAM*.



Cum centro enim E, & interuallo EB descripto circulo BHD, ipse cadit totus
a ex 26. h. extra Ellipsim, cum ei sit [a] circumscriptus, vnde semi-diameter EB erit *MAXIMA*; & facto cẽtro E, cum radio EA descripto circulo EOC, ipse totus cadet intra Elli-
b ibidem. psim, cum ei sit [b] inscriptus, ex quo, EA erit *MINIMA*. Quod erat primò, &c.

Ampliùs in quadrãte Ellipseos AFCE ductæ sint quotcunque semi-diametri EF, EG, & sit angulus BEF minor BEG; dico EF maiorem esse EG.

Applicentur enim per F, G, ad maiorem axim BE rectæ KF, LG, quæ productæ, circuli peripheriæ BIH occurrant in I, M, & iungantur EI, EM.

c 21. primi conic. Erit in semi-circulo BHD, quadratum ML ad IK, vt rectangulum DLB ad DKB; & in semi-Ellipsi BCD, quadratum GL ad FK, [c] vt idem rectangulum DLB ad idem DKB, ergo quadratum ML ad IK, erit vt quadratum GL ad FK, siue linea ML ad IK, vt pars GL ad partem FK, & vt reliqua MG
d 63. h. ad reliquam IF, sed est GL [d] maior FK: quare MG erit maior IF, ideoque rectangulum MGL sub maioribus lateribus contentum, maius erit rectangulo IFK sub minoribus, & duplum vnius, alterius duplo maius.

Iam cum triangula EKI, ELM sint rectangula ad K, L, erunt triangula EFI, EGM obtusiangula ad F, G, estque linea EI æqualis EM, ergo quadradratum EI, hoc est duo simul quadrata EF, FI, cum duplo rectanguli KFI, maiora erunt quadrato EM, siue duobus simul quadratis EG, GM,

cum

cum duplo rectanguli LGM, sed duplum rectanguli KFI, maius est duplo rectanguli LGM, vt superiùs ostensum fuit; quare his demptis, erunt reliqua quadrata EF, FI simul, maiora reliquis simul EG, GM, sed quadratum FI minus est quadrato GM, cum sit linea FI minor GM, ergo reliquum quadratum EF maius erit reliquo EG, siue semi-diameter EF maior semi-diametro EG. Quod secundò erat, &c.

Dico tandem, in vno quoque Ellipseos rectangulo quadrante, nempe in quadrante ABE, reperiri aliam semi-diametrum ipsi EG æqualem.

Producta enim applicata GL ad N, & iuncta EN, in triangulis ELG, ELN, est NL æqualis LG, & LE communis, & anguli ad L recti, quare bases EG, GN æquales erunt, & sic in quolibet alio quadrante; & vnaquæque semi-diametrorum vnica est in eodem quadrante, cum quę ad partes maioris axis ducuntur, maiores sint, & quæ ad partes minoris, minores: quapropter à centro Ellipseos quatuor tantùm (in rectangulis quadrantibus inter semi-axes) semi-diametri æquales ad eius peripheriam duci poterunt. Quod vltimò demonstrandum erat.

COROLL. I.

Hinc est, quod *MAXIMA* diametrorum, in Ellipsi, est axis maior, *MINIMA* verò axis minor; eadem enim est ratio de duplis, ac de subduplis.

COROLL. II.

PAtet etiam, quod si ex Ellipseos centro ad interuallum cuiuscunque semi-diametri, quæ non sit axis, circulus describatur, ipsum ad partes maioris axis cadere intra, ad partes verò minoris cadere extra, & in quatuor tantùm punctis Ellipsim secare.

THEOR. XLII. PROP. LXXXVII.

Si ad extremum axis datæ coni-sectionis ducta fuerit contingens linea, quæ cum alia ad alterum sectionis punctum contingente conueniat; semper ea, quæ inter occursum, & axem intercipitur (qui tamen in sectione Ellipsis, sit axis maior) minor est altera contingente: & in Ellipsi tantùm, contingens ex minori axe altera contingente maior est.

SIt coni-sectio AB, cuius axis BC (qui tamen in Ellipsi sit axis maior) & in Hyperbola, ac Ellipsi sit centrum D, sitque ex vertice B contingens linea BE; sumptoque in sectione quolibet alio puncto A (quod tamen in Ellipsi non sit alterum axis extremum; nam ipsæ contingentes, per 27. secundi conic. inter se æquidistarent) ab eo ducatur contingens AE [a] quæ quidem cum BE conueniet in E. Dico tangentem BE ipsa AE minorem esse. a 58. h.

Ducatur per occursum E diameter DEF, iungaturque AB. Patet ipsam diametrum, cum transeat per occursum tangentium, secare AB tactus iungentem [b] bifariam in F. b 30. secũdi conic.

Iam

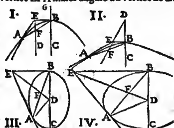
Iam in Parabola, quam exhibet prima huius schematis figura, cum sint BC, EF diametri [a] ipsæ erunt inter se parallelæ, BA verò eas secat, quare angulus GBF æquatur angulo EFA, sed est GBF obtusus, cum GBE sit rectus (nam est CB axis Parabolæ) ergo angulus quoque EFA obtusus erit, siue maior consequenti BFE.

a cõuerſ. 46. pr. conic.

In Hyperbola verò secundæ figuræ, cum angulus CBA externus trianguli DBF sit acutus, (nam CBE rectus est) sitque maior interno BFE, is quidem acutus erit, & qui ei deinceps EFA erit obtusus, siue maior ipso BFE.

In Ellipsi tandem tertiæ figuræ iuncta DA, cum in triangulis DFB, DFA sit BF æqualis AF, & communis FD [b] basis verò BD maior DA, erit angulus BFD maior angulo DFA, & ei ad verticẽ EFA maior angulo ad verticẽ BFE.

b 84. h.



In triangulis itaq; AFE, BFE, cuiuslibet harum figurarum, cum sit latus AF æqualis FB, & FE commune, angulus verò EFA demonstratus sit maior angulo BFE, erit basis AF maior basi BE. Quare contingens BE ex termino maioris axis, minor est altera contingente AE. Quod primò probandum erat.

Si verò, in Ellipsi ABC, quartæ figuræ, axis BC fuerit minor. Positis, & constructis ijsdem. Cum in triangulis AFD, BFD sit latus AF æquale lateri BF, & commune FD, basis verò AD maior basi DB (cum minor semi-axis DB sit *MINIMA* [c] semi-diametrorum) erit angulus AFD, siue BFE maior angulo BFD, hoc est AFE, suntque in triangulis BFE, AFE latera BF, AF [d] inter se æqualia, & latus FE commune; quare basis BE, erit maior basi AE. Quod fuit vltimò demonstrandum.

c ibidem.

d 30. sec. conic.

THEOR. XLIII. PROP. LXXXVIII.

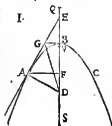
Si coni-sectionem recta linea contingens cum axe conueniat, & à tactu erigatur contingenti perpendicularis, hæc necessariò cum axe conueniet, et in Ellipsi cum vtroque axe, sed priùs cum maiori; parsque ipsius intercepta inter contactum, & occursum cum axe, qui tamen in Ellipsi sit axis maior, semper minor erit eo axis segmento, quod inter occursum, & verticem intercipitur.

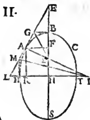
Cum autem in Ellipsi, contingens linea minori axi occurret, tunc prædicta perpendicularis inter contactum, & minorem axem intercepta, maior semper erit segmento minoris axis, quod inter occursum, & verticem intercipitur.

SIt coni-sectio ABC, cuius axis BD, & prima figura Parabolen, aut Hyperbolen repræsentet, secunda verò Ellipsim, cuius axis maior, sit BS, & ex

& ex puncto A in sectione extra verticem sumpto ipsam [a] contingat recta AE, quæ cum axe SB, [b] conueniet, & in Ellipsi cum vtroque axe SB, TH; sintque occursus E, L, & à contactu A erigatur ipsi perpendicularis AD. Dico primùm hanc cum axe conuenire, & in Ellipsi cum vtroque axe, sed priùs cum maiori. a 2. 4. h. b 24. 25. pr. conic.

Ducatur ex A recta AF axi ordinatim applicata, quæ cum axe rectum angulum AFE cõstituet, ac ideo angulus AEF acutus erit, sed est rectus EAD, quare AD conuenit cum EBD, vtputa in D. Eadem ratione in Ellipsi demonstrabitur ipsam AD conuenire quoque cum minori axe HT, si ex A ordinatè ei applicetur AR: nam cum angulus ARL sit rectus, angulus ALR acutus erit, sed LAD rectus ponitur, quare AD conuenit quoque cum axe minori HT, vt in I. Quod autem priùs cum maiori axe conueniat, ita ostendetur. Etenim cum recta AF sit ad axim applicata, & contingens AE cum axe in E conueniat, N verò sit centrum Ellipsis, erit rectangulum EFN ad quadratum AF, [c] vt transuersum latus ad rectum, sed quadratum AF æquatur rectangulo EFD, ergo rectangulum EFN ad rectangulum EFD, siue linea FN ad FD, erit vt transuersum latus ad rectum, hoc est vt quadratum BS ad quadratum HT (nam secunda diameter HT media proportionalis est inter transuersum BS, & latus rectum) sed quadratum BS maius est quadrato HT, cum sit BS axis maior, ergo & linea NF maior erit ipsa FD. Perpendicularis ergo AD secat priùs maiorem axem, quàm minorem. c 37. primi conic.





Dico insuper in vtraque figura interceptam DA minorem esse intercepto axis segmento DB.

Ducta enim ex B recta BG ordinatim ductæ FA æquidistans, ipsa quidem sectionem [d] continget, & alteri contingenti AE [e] occurret, vt in G. Iungatur GD: cumque anguli GAD, GBD sint recti, erunt duo quadrata DA, AG quadrato DG itemque duo quadrata DB, BG eidem quodrato DG æqualia, ergo duo simul DA, AG duobus simul DB, BG æqualia erunt, sed AG quadratum maius est quadrato BG cum ipsa tangens AG, sit [f] maior tangente BG, ergo quadtatum DA minus erit quadrato DB, siue perpendicularis DA minor maioris axis segmento DB. Quod erat primò, &c. d 32 primi conic. e 58. h. f 87. h.

Cum verò in Ellipsi tangens AL occurret minori axi TH, vt in L. Dico interceptam perpendicularem AI maiorem esse axis segmento IH.

Si enim ex H ducatur HM ordinatim applicatæ NB æquidistans hæc Ellipsim [g] continget, & alteri tangenti AL [h] occurret vt in M; iuncta ergo MI, erunt duo triangula rectangula MAI, MHI, quorum anguli ad A, & H recti sunt; quare duo quadrata MA, AI vnico MI, & duo MH, HI eidem MI æqualia erunt, ergo duo simul MA, AI duobus simul MH, HI sunt æqualia, g 32. primi conic. h 58. h.

sed

a 87. h. ſed quadratum MA minus [a] eſt quadrato HM, ergo quadratum AI maius erit quadrato HI, ſiue perpendicularis intercepta AI, maior intercepto minoris axis ſegmento IH. Quod tandem demonſtrare oportebat.

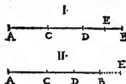
ALITER abſque ope propoſitionis 87. præmiſſo tantum ſequenti lemmate pro Ellipſi.

LEMMA XIII. PROP. XIC.

Si fuerit, in vtraque figura, rectangulum ſub extremis AB, BD æquale quadrato mediæ BC, dico, in prima figura, ſi à tertia BD dematur aliqua pars BE, rectangulum ſub AE, ED, minus eſſe quadrato mediæ EC.

Cum ſit enim, vt totum AB ad totum BC, ita ablatum BC ad ablatũ BD, erit reliquum AC ad reliquum CD, vt totum AB ad totum BC. Et cum ſit CE minor CB, habebit AC ad CE maiorem rationem quàm AC ad CB, & componendo AE ad EC maiorem quàm AB ad BC, vel quàm AC ad CD. Si ergo totum AE ad totum EC maiorẽ habet rationem quàm ablatum AC ad ablatum CD, habebit reliquum CE ad reliquũ ED maiorem rationem, quàm totum AE ad totum EC, vel AE ad EC minorem habebit rationem quàm CE ad ED; ergo rectangulum ſub extremis AE, ED minus [b] erit quadrato mediæ EC.

b 16. 7. Pappi.



SI verò, iiſdem poſitis, in ſecunda figura, tertiæ proportionali BD recta quædam BE adijciatur; dico rectangulum ſub AE, ED maius eſſe quadrato EC; quod licet in 9. prop. huius iam ſit oſtenſum, hic idem aliter nulla facta conſtructione demonſtrabimus.

Quoniam enim CE maior eſt CB, habebit AC ad CE minorem rationem quàm AC ad CB, & componendo, tota AE ad totam EC, minorem quàm ablata AB ad ablatam BC, vel quàm AC ad CD, ergo reliqua CE ad reliquam ED, minorem quoque habebit rationem quàm tota AE ad EC, hoc eſt AE ad EC maiorem quàm EC ad ED, ergo rectangulum ſub AE, ED maius [c] quadrato mediæ EC. Quod, &c.

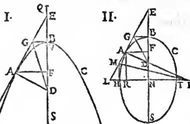
c Ibidem.

IAM, vt ad expeditiorem demonſtrationem præcedentis propoſitionis accedamus, ſuper eiſdem delineationibus, repetitis ijs omnibus, quæ ibi (vſque ad ea verba excluſiuè *Ducta enim ex B recta BG, &c.*) exponuntur, ac demonſtrantur, ſic vlteriùs proſequemur. Cum enim in ſingulis figuris triãgula DAE, LAI ſint rectangula ad A, ex quo baſibus ductæ ſunt perpendiculares AF, AR; erit in triangulo DAE rectangulum EDF æquale quadrato

DA,

DA, & in triangulo LAI rectangulum LIR æquale quadrato IA. Quod ſerua.

Iam ſi ſectio primæ figuræ ABC fuerit Parabole, cum AE ſit ei contingens erit EB æqualis [a] BF, ergo rectangulum EDF cum quadrato FB æquabitur quadrato BD, quare ſolum rectangulũ EDF, ſiue quadratum DA minus erit quadrato DB, ſiue linea DA minor DB. [a] 20. pr. conic.



Si verò eadem figura Hyperbolen repreſentet, reperto eius centro Q, erit rectangulum FQE [a] æquale quadrato QB, ergo FQ ad QB, vt QB ad QE, vel vt [b] FB ad BE, ſed FQ maior eſt QB, ergo FB erit maior BE, ſiue pluſquam dimidium ipſa FE, diuiſa ergo FE bifariam in V, erit FV minor FB, eritque rectangulum EDF cum quadrato FV æquale quadrato DV, igitur ſolum rectangulum EDF, hoc eſt quadratum DA minus quadrato DV, ſeu linea DA minor DV, & eò minor ipſa DB. [a] 37. primi conic. [b] Coroll. 12. h.

Amplius in Ellipſi ſecundæ figuræ, dum perpendicularis AD conuenit cum axe maiori, eſt rectangulum ENF [c] æquale quadrato NB, & à tertia proportionali NF dempta eſt pars ND, ergo per Lemma præcedens erit rectangulum EDF, ſiue quadratum DA minus quadrato DB, hoc eſt perpendicularis DA maiori axi occurrens, minor eiuſdem axis portione DB. [c] 37. primi conic.

Tandem rectangulum LNR æquatur quadrato NH, & tertiæ proportionali NR addita eſt NI, ergo per idem Lemma erit rectangulum LIR, ſiue quadratum IA maius quadrato IH, ſiue perpendicularis AI minori axi occurrens maior eiuſdem axis portione HI. Quod fuit, &c.

THEOR. XLIV. PROP. XC.

Si quamcunque coni-ſectionem recta linea contingat ad punctum, quod non ſit axis vertex, à quo ductæ ſint duæ rectæ lineæ, altera contingenti, altera autem axi perpendicularis; erit in Parabola ea axis portio inter perpendiculares intercepta æqualis, in Hyperbola verò maior, ſed in Ellipſi minor dimidio recti lateris eius axis, cui perpendiculares occurrunt.

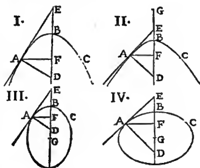
Sit quæcunque coni-ſectio ABC, cuius axis BD, vertex B, & aliud in ea punctum ſit A, à quo ducta ſit [d] contingens AE cum axe [e] conueniens in E, atque ex A erecta ſit AD ipſi AE perpendicularis (quæ cum axe conueniet [f] in D) & AF perpendicularis ad axem. Dico primùm in Parabola primæ figuræ, interceptam axis portionem DF dimidio recti lateris æqualem eſſe. [d] 2. 4. h. [e] 24. 25. pr. conic. [f] 88. h.

S Nam

a Coroll. 1. h. b 35. primi conic. Nam quadratum AF æquatur a rectangulo ſub FB, & recto latere, vel ſub dupla FB, ſiue ſub b EF, & dimidio recti, ſed idem quadratum AF æquatur rectangulo ſub eadem EF, & ſub FD; quare FD erit dimidium recti. Quod primò, &c.

Amplius in Hyperbola ſecundæ figuræ, dico interceptam portionem FD eſſe pluſquam dimidium recti lateris.

Nam reperto eius centro G, erit rectangulum GFE ad quadratum AF, c 37. primi conic. vel ad rectangulum DFE, vt c tranſuerſum latus ad rectum, ſed rectangulum GFE ad DFE, eſt vt linea GF ad FD, ergo GF ad FD eſt vt tranſuerſum latus ad rectum, vel vt ſemi-tranſuerſum GB ad ſemi-rectum, & permutando GF ad GB, erit vt FD ad ſemirectum, ſed eſt GF maior GB, ergo FD erit maior ſemi-recto latere. Quod ſecundò erat, &c.



Tandem in Ellipſi tertiæ figuræ, in qua intercepta axis portio DF eſt de maiori axe, vel in quarta figura, in qua prædicta portio DF eſt de minori axe, dico item ipſam DF minorem eſſe dimidio recti lateris eius axis, cui ductæ perpendiculares occurrunt.

Sumpto enim Ellipſis centro G, eſt rectangulũ EFG ad quadratum AF, vel ad rectangulum EFD, d vt d ibidem. tranſuerſum latus ad rectum, ſed idem rectangulum EFG ad EFD eſt vt linea GF ad FD quare GF ad FD eſt vt tranſuerſum ad rectum, vel vt GB dimidium tranſuerſi ad dimidium recti, & permutando GF ad GB, vt FD ad dimidium recti, ſed eſt GF minor GB, ergo & FD erit minor quàm dimidium recti. Quod vltimò, &c.

COROLL. I.

Hinc patet in Parabola, & Hyperbola contingenti perpendicularem inter contactum, & axem, ſemper eſſe pluſquam dimidium recti lateris ſectionis. Nam in triangulo AFD recta AD recto angulo oppoſita maior eſt latere DF, ſed DF, vel æqualis eſt (in Parabola) vel maior (in Hyperbola) prædicto dimidio, quare perpẽdicularis AD erit omninò maior ipſo dimidio.

CO-

COROLL. II.

PAtet quoque in Parabola, & Hyperbola interceptam axis portionem inter verticem, & contingenti perpendicularem ſemper item eſſe pluſquam dimidium recti lateris propriæ ſectionis. Quoniam cum demonſtratum ſit DB maiorem [a] eſſe DA, & DA in præcedenti Corollario ſit maior dimidio recti lateris, eò magis DB erit maior prædicto dimidio. [a] 88. h.

COROLL. III.

MAnifeſtum eſt etiam in Hyperbola, & Ellipſi ſemper eam axis portionem, quæ eſt inter centrum ſectionis, & ordinatim ductam ex contactu, ad portionem eiuſdem axis inter ipſam ordinatam, & contingenti perpendicularem, eſſe vt ſemi-tranſuerſum ſectionis ad ſemi-rectum, vel vt tranſuerſum ad rectum. Demonſtratum eſt enim in ſecunda, tertia, & quarta figura rectam GF ad FD eſſe vt tranſuerſum latus ad rectum.

THEOR. XLV. PROP. XCI.

Si Ellipſim quædam recta linea contingat inter axium extrema, cui à tactu ducta ſit perpendicularis cum vtroque axe conueniens, ſemper ipſius portio inter contactum, & minorem axim intercepta, eſt maior ſemi-axe maiori; portio verò inter contactum, & maiorem axim, maior eſt ſemi-recto latere maioris axis; & eadem portio eſt minor ſemi-axe minori; ac demum portio inter contactum, & minorem axim minor eſt ſemi-recto latere minoris axis.

SIt Ellipſis ABC, cuius maior axis BC, minor IL, centrum G, & quædam contingens MAE inter axium extrema, quæ ipſis [b] occurret in E, M; & ex A ducta ſit ADH contingenti perpendicularis, quæ vtrique axi occurret, ſed [c] priùs cum maiori in D, cum minori verò in H. [b] 25. primi conic. [c] 88. h.

1. Dico primùm interceptam AH ſemper maiorem eſſe maiori ſemi-axe GB.

Agatur HP æquidiſtans ad GE, & AFO ad NH. Et quoniam eſt HP maior GE, & HO æqualis GF, erit rectangulum PHO, ſiue quadratum HA (in triangulo rectangulo PAH) maius rectangulo EGF, ſiue [d] quadrato GB, hoc eſt linea AH maior ipſa GB. Quod primò, &c. [d] 37. primi conic.

2. Ampliùs, dico AD eſſe pluſquam dimidium recti lateris axis BC.

Quoniam cum ſit GB minor AH, vt modò oſtendimus, habebit GD ad AD minorem rationem quàm AH ad AD, vel quàm FG ad FD, vel quàm eadem [e] GB ſemi-tranſuerſum, ad ſemi-rectum; vnde AD erit maior quam ſemi-rectum latus maioris axis. Quod ſecundò, &c. [e] 3. Coroll. 90. h.

3. Dico præterea eandem portionem AD minorem eſſe quam IG dimidium minoris axis.

Quoniam ducta AQN parallela ad GF, & DQR ad HM; cum sit RD minor MG, & DQ æqualis GN, erit rectangulum RDQ, siue quadratum DA, (in triangulo rectangulo RAD) minus rectangulo MGN [a] siue quadratum GI; hoc est intercepta linea DA minor semi-axe minori GI. Quod tertiò, &c.

[a] 37. primi conic.

4. Tandem, dico interceptam perpendicularem AH minorē esse quàm dimidium recti lateris minoris axis.

Etenim cum sit IG maior AD, vt supra ostendimus; habebit IG ad AH maiorem rationem quàm AD ad AH, vel quàm NG ad NH, vel quàm [b] eadem IG semi-transuersum ad semi-rectum; quare intercepta AH erit minor semi-recto minoris axis IL. Quod vltimò ostendere proponebatur.

[b] 3. Coroll. 90. h.

COROLL. I.

Hinc est, quod semper in Ellipsi intercepta maioris axis portio inter contingenti perpendicularem, & verticem, maior est dimidio recti lateris maioris axis. Nam in figura huius, ostensa est AD ad numerum 2. maior semi-recto maioris axis BC, sed est DB [c] maior DA, quare DB eò maior erit prædicto semi-recto.

[c] 88. h.

COROLL. II.

Patet etiam in Ellipsi, quod intercepta minoris axis portio inter contingenti perpendicularem, & verticem, est minor dimidio recti lateris eiusdem minoris axis. Quoniam supra ad numerum 4. demonstrauimus AH minorem esse semi-recto minoris axis IL, sed est [d] IH minor AH, quare IH eò minor erit prædicto semi-recto.

[d] ibidem.

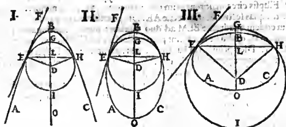
THEO-

THEOR. XLVI. PROP. XCII.

Si Parabolen, vel Hyperbolen, aut Ellipsim circa maiorem axim recta linea, præter ad verticem contingat, cui à tactu ducta sit perpendicularis axi occurrens; circulus, cuius centrum sit idem occursus, radius verò sit ipsa perpẽdicularis erit sectioni inscriptus.

Si autem Ellipsis fuerit circa minorem axim, cui prædicta perpendicularis occurrat, circulus ex ea tanquam radio, at centro facto ipso occursu, erit eidem Ellipsi circumscriptus.

ESto ABC, Parabole, vel Hyperbole, in prima figura, aut Ellipsis in secunda, circa maiorem axim BO; vel circa minorẽ, vt in tertia, quarum vertex B, & ad aliud punctum quædam contingens EF, cui ducta sit perpendicularis ED, quæ axi occurret[a] in D, quo facto centro, & interuallo DE circulus EGHI describatur. Dico primùm hunc, in prima, & secunda figura, datæ sectioni esse inscriptum. a 88. h.



Applicata enim EH, secans axim in L, & iuncta DH. Cum in triangulis ELD, HLD anguli ad L sint recti, & latera EL, LD æqualia lateribus HL, LD, erit basis DE æqualis DH, ex quo circulus ex DE transibit omnino per H, ideoque coni-sectio, & circulus, sunt binæ sectiones simul adscriptæ (cum earum diametri, & applicatæ simul congruant) quæ in ijsdem extremis communis applicatæ EH simul conueniunt, atque ad eorum alterum E, eadem recta EF vtranque sectionem contingit, nempe sectionem ABC, ex suppositione, & circulum EGHI, cum EF sit ad extremum semi-diametri ED perpendicularis, atque vertex circuli G cadit infra B verticem sectionis, cum sit DB[b] maior DE, siue maior DG, quare circulus ex DE erit[c] sectioni inscriptus. Quod primò erat, &c. b ibidem. c 61. h.

AMpliùs, dico in tertia figura, prædictum circulum EGHI esse datæ Ellipsi ABCO circumscriptum,

Nam facta eadem constructione, ac supra, ostendetur pariter circulum transire

transire per H, adscriptum esse Ellipsi ABCO, & Ellipseos contingentem EF circulum quoque contingere, sed huius verticem G, cadere vltra Ellipseos verticem B, cum sit DE, vel DG maior [a] DB, quare circulus ex DE erit Ellipsi ABCO [b] circumscriptus. Quod erat vltimò demonstrandum.

[a] 88. h.
[b] 61. h.

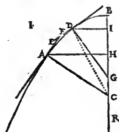
THEOR. XLVIII. PROP. XCIII.

Si Parabolen, vel Hyperbolen, aut Ellipsim circa maiorem axim quotcunque rectæ lineæ ad easdem axis partes, præter verticem contingant, quibus à tactibus ductæ sint perpendiculares axi occurrentes: ipsæ, quò magis contactuum puncta à maioris axis vertice distabunt eò maiores erunt.

E contra: si Ellipsis fuerit circa minorem axim, huiusmodi perpendiculares semper decrescunt, quò magis earum contactus à minoris axis vertice remouentur.

SIt AB Parabole, vt in prima figura, vel Hyperbole, vt in secunda, aut Ellipsis circa maiorem axim BR, vt in tertia, vel circa minorem, vt in quarta, quas sectiones duæ rectæ AE, DF ad easdem axis partes, & in Ellipsi in eodem quadrante BLM ad duo quælibet puncta contingant, præter verticem B, quibus erectæ sint perpendiculares AC, DG axi occurrentes in C, G. Dico primùm in Parabola, & Hyperbola, ac in Ellipsi tertiæ figuræ interceptam perpendicularem AC ex puncto A, remotiori à vertice, maiorem esse perpendiculari DG ex puncto D propinquiori.

1. Nam, in singulis figuris, cum anguli CAE, GDF sint duo recti, & contingentes AE, DF cadant extra sectionem, & si concipiatur iungi recta AD, ipsa cadat tota intra sectionem, anguli, quos eadem A D conficiet cum perpendicularibus A C, D G, minores erunt duobus rectis, quare ipsæ conuenient simul ad partem axis, vel vltra, vel inter contactus, & axim.



2. Iam, ducta D I parallela ad AH, siue axi perpendiculari, cum in Parabola primæ figuræ [c] sit CH æqualis GI, vtraque enim est [d] dimidium recti lateris, & AH maior D I, erunt quadrata simul C H, AH, siue quadratum AC, maius quadratis simul G I, D I, siue quadrato DG, hoc est linea AC maior DG.

[c] 35. primi conic.
[d] 90. h.

3. In Hyperbola verò secundæ figuræ sumpto eius centro L: cum L H ad H C, itemque L I ad I G, [e] vt transuersum latus ad rectum, erit L H ad H C, vt L I ad I G, & permutando L H ad L I, vt H C ad I G, sed est L H maior L I, ergo, & H C, maior I G, estque H A maior I D, quare duo

[e] 3. Coroll. 90. h.

simul

simul quadrata C H, H A, siue vnicum quadratum A C, maius est duobus simul quadratis G I, I D, siue vnico quadrato D G, hoc est linea A C maior D G.

II.

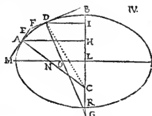
4. At in Ellipsi tertiæ figuræ cum licet A H excedens semper D I, non tamen sit C H, vel æqualis, vel maior G I, sed omnino minor (est enim L H ad H C, itemque L I, ad I G, vt [a] transuersum ad rectum, ideoque L H ad H C, est vt L I ad I G, sed permutando L H maior est L I, ergo, & H C maior I G) oportuit hic aliam demonstrationem inquirere, quæ, tum Hyperbolæ, tum Ellipsi circa maiorem axim simul inseruiet, si concipiatur tertia figura vtriusque sectionis speciem exhibere. [a] 3. Coroll. 90. h.

III.

Itaque, vel ordinata AH, quæ ex remotiori contactu à vertice B applicatur, occurrit axi in puncto G, vel infra, vel supra. Si primum, vel secundum, patet punctum C eò magis cadere infra G. Si tertium, hoc idem tamen demonstrabitur, videlicet punctum C cadere omnino infra G. Cum sit enim G I maior G H habebit L G ad G I minorem rationem, quàm L G ad G H, & componendo L I ad I G minorem item rationem quàm L H ad H G, sed vt L I ad I G, ita L H ad H C, vt superiùs ostendimus, quare L H ad H C, minorem habebit rationem quàm eadem L H ad H G, vnde H C maior est H G, siue punctum C cadit infra G; quapropter intercepta perpendicularis A C, ex A remotiori contactu à vertice B, occurrit axi infra occursum G interceptæ perpendicularis D G, ex propiori contactu D.

5. Iam A C, & D G conueniunt simul ad partem axis B C, vt hic ad numerum 1. ostensum fuit, & est punctum C infra G, quare si ex G ducatur G N, parallela ad C A ipsa sectionis peripheriam secabit inter A, & D, vt in N. Si igitur concipiantur puncta A, N, iungi recta linea, ipsa cadet tota intra sectionem, & producta, axi occurret extra ad partes B, & fiet triangulum, in quo A C erit maior N G: itaque si cum centro G, interuallo G D describatur circulus D O, cum [b] sit sectioni semper inscriptus, ipsæ secabit rectam G N, vt in O, eritque N G maior G O, siue maior G D, quare eò magis A C maior erit D G. Quod erat primò demonstrandum. [b] 92. h.

6. IN



6. IN quarta autem figura Ellipsis circa minorem axim BR, in qua prædictæ contingentibus perpendiculares ipsi BR occurrunt: dico AC, quæ à remotiori contactu educitur minorem esse DG, quæ à propinquiori. Nam cum sit DO ad DG, vt IL ad IG, vel vt [a] transuersum latus ad rectum, vel vt HL ad HC, vel vt AN ad AC, erit DO ad DG, vt AN ad AC, & permutando, vt DO ad AN, ita DG ad AC, sed est DO maior AN, vt supra ad numerum 5. ostensum est, ergo, & DG maior erit ipsa AC. Quod secundò ostendere propositum fuit.

[a] 3. Coroll. 90. h.

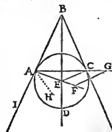
PROBL. XXXIV. PROP. XCIV.

Dato angulo rectilineo, ad punctum in eius latere datum MAXIMVM circulum inscribere.

SIt datus angulus rectilineus ABC, & punctum in eius latere datum sit A, ad quod oporteat *MAXIMVM* circulum inscribere.

Bifariam secetur angulus à recta BD, & ex A ipsi AB perpendicularis erigatur AE, occurrens BD in E; & centro E, interuallo EA describatur circulus. Dico hunc esse *MAXIMVM* quæsitum.

Nam sumpta BC ipsi BA æquali, iunctisque AC, EC; cum latera AB, BE, æqualia sint lateribus CB, BE, & anguli ad B æquales, erit EA æqualis EC. Insuper sunt BA, AE, ipsis BC, CE æqualia, vtrunque vtrique, & basis BE communis, ergo angulus BAE angulo BCE æqualis, nempe rectus quare circulus ex EA per C transibit, contigetque latera BA, BC, siue erit angulo ABC inscriptus. Dico hunc esse *MAXIMVM* quæsitum.



Nam si centra circulorum ad A pertinentium, fuerint in portione perpendicularis AE, inter A, & E; ipsi, vt satis constat, erũt quidem angulo inscripti, cum circulo quoque inscripti sint; sed minores erunt circulo ADC cum sint minoris radij; illi verò quorum centra sunt in producta AE, vt in F, sunt quidem maiores, sed latus BC omnino secãt: quoniam ducta FG parallela ad EC, quæ productæ AC occurrat in G, cum sit AF ad FG, vt AE ad EC, sitque AE ipsi EC æqualis, erit quoque AF æqualis FG: quare circulus ex FA transibit per punctum G, quod est extra angulum; ideoque in se remeans secabit omnino latus BC, quod est infinitæ extensionis. Si verò centrum sumatur extra prædicta perpendicularem

cularem AE, vt in H, patet iunctam HA, cum recta BAI inæquales angulos efficere, ac ideò peripheriam circuli ad partem acuti anguli cadere extra datum angulum, & ad partem obtusi cadere intra, sicque latus dati anguli secare. Quapropter circulus ACD erit *MAXIMVS* inscriptus ad datum punctum A. Quod erat faciendum.

PROBL. XXXV. PROP. XCV.

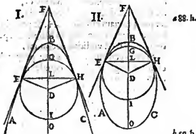
Datæ Parabolæ, vel Hyperbolæ, siue Ellipsi circa maiorem axim, ad datum punctum in eius peripheria, præter axis verticem, MAXIMVM circulum inscribere.

SIt ABC data Parabole, vel Hyperbole, in prima figura, vel Ellipsis circa maiorem axim BO, in secunda, quarum vertex sit B, & punctum in ea sumptum præter B sit E. Oportet ad punctum E *MAXIMVM* datæ sectioni circulum inscribere.

Ducatur ex E sectionem contingens EF, cui erigatur perpendicularis ED axi [a] occurrens in D. Dico si cum centro D, interuallo DE, circulus EGHI describatur ipsum esse quæsitum: nam esse inscriptum patet ex prima parte 92. huius; quod autem sit *MAXIMVS* constabit sic: applicata enim ELH, & producta EF axi occurrens in F, iunctaque FH, hæc pariter sectionem [b] contingent, & fiet angulus EFH, & quilibet alius circulus, vel cadet intra AGHI, vel secabit latera anguli EFH, vt in præcedenti ostensum fuit, ac ideò secabit priùs sectionem. Quare circulus EGHI erit *MAXIMVS* sectioni inscriptus ad punctum E. Quod erat faciendum.

[a] 88. h.

[b] 59. h.



PROBL. XXXVI. PROP. XCVI.

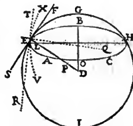
Datæ Ellipsi circa minorem axim, ad datum punctum in eius peripheria, præter axis verticem, MINIMVM circulum circumscribere.

SIt data Ellipsis ABC, circa minorem axim BO, cuius vertex B, & in peripheria datum punctum, præter B, sit E, per quod oporteat *MINIMVM* circulum circumscribere.

Ducatur EF Ellipsim contingens, cui ex E perpendicularis erigatur ED maiori axi occurrens in L, minori verò in D: quo facto centro, & interuallo DE circulus describatur EGHI. Dico hunc esse quæsitum.

Nam esse circumscriptum, patet ex secunda parte 92. huius. Sed est quoq; *MINIMVS*: quoniam quilibet alius circulus, cuius radius, maior sit ipso DE, est omnino maior circulo EGHI, & cuius radius minor sit DE, est quidem minor, sed vel totus cadit intra Ellipsim, vel eius peripheriam necessariò secat. Nam si centrum fuerit in perpendiculari ED, & radius non maior distantia EL, quæ cadit inter [a] contactum E, & maiorem axim, circulus cadet totus intra, & si radius fuerit maior EL, qualis est EP, tunc eius circulus cadet totus intra circulum EGHI, sed licet ipsius peripheria ad partes G, B, statim ac discedit ab E, cadat inter peripheriam circuli AGH, & peripheriam Ellipsis EBH, cum tamen in se ipsum redeat, necessariò Ellipticam peripheriam EBH secabit, nam spatium EGHB est vndique occlusum.

a 92. h.



Si verò centrum fuerit extra perpendicularem ED, vt in Q: iuncta QE cum contingente SEF inæquales angulos efficiet, quorum alterum, videlicet SEQ obtusus erit, quare si ipsi EQ erigatur perpendicularis ER, hæc omninò secabit [b] Ellipsim: quare si cum centro Q, interuallo QE circulus describatur XEV, ipsæ ad partes secantis ER secabit omnino Ellipsis peripheriam, vt per se patet. Ergo circulus ex DE est *MINIMVS* circumscriptus quæsitus. Quod faciendum erat.

b 32. primi conic.

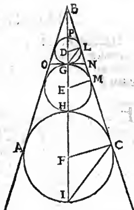
THEOR. XLVIII. PROP. XCVII.

MAXIMI circuli angulo rectilineo inscripti, & successiuè se mutuò contingentes, sunt inter se in continua, eademque ratione geometrica, quæ progreditur iuxta quadrata tangentium, ex vertice dati anguli ductarum.

ESto angulus ABC, cuius axis BDEF, in quo sint centra D, E, F, &c. *MAXIMORVM* circulorum dato angulo inscriptorum, & mutui ipsorum contactus sint G, H, &c. ad latus verò anguli, contactus sint L, M, C, &c. Dico hos circulos inter se esse in continua, eademque ratione geometrica, ipsamque incedere iuxta quadrata contingentium BL, BM, BC, &c.

Iunctis enim DL, EM, FC, & GL, IC. Cum in triangulis BLD, BCF, anguli BLD, BCF sint recti, & angulus ad B communis, erit reliquus BDL, reliquo

reliquo BFC æqualis, qui sunt anguli ad centra D, F: ergo ipsorum dimidia ad circumferentias, hoc est anguli BGL, BIC æquales erunt, vnde GL æquidistabit IC: quare, vt CB ad BL, ita IB, ad BG, vel sumpta communi altitudine BH, ita rectangulum IBH, siue quadratum BC, ad rectangulum HBG, vel ad quadratum BM: cum ergo sit CB ad BL, vt quadratum CB ad quadratum BM, erunt tres contingentes BC, BM, BL, in eadem ratione geometrica, sed CB ad BM, est vt CF ad ME, & MB ad BL, vt ME ad LD; ergo CF, ME, LD, vti etiam ipsarum quadrata, siue *MAXIMI* circuli ex FC, EM, DL erunt in eadem ratione geometrica, quę procedit iuxta quadrata contingentium BC, BM, BL. Quod ostendere proponebatur.



COROLL.

Hinc elicitur, quod si datus angulus fuerit angulus trianguli æquilateri, siue duæ tertiæ vnius recti, prædicti *MAXIMI* circuli erunt inter se in continua progressione nonupla. Tunc enim in triangulo ęquilatero BNO, *MAXIMVS* inscriptus circulus ex DG singula latera ad puncta contactuum bifariam secabit, quare BL æquabitur LN, siue NG, siue NM, (cum circulum contingentes, ex eodem puncto sint æquales) hoc est BM erit tripla BL, & quadratum BM nonuplum quadrati BL, vel circulus ex EM nonuplus circuli ex DL, itemque circulus ex FC nonuplus circuli ex EM, cum sint in eadem proportione geometrica, & hoc semper, quotcunq; sint huiusmodi circuli se mutuò, & prædicti anguli latera contingentes.

Hic autem notandum est inter hos *MAXIMOS* circulos non dari *MAXIMVM*, cum infra circulum FC alij infiniti in eadem progressione dato angulo inscribi possint, eò quod ipse ad partes L sit infinitæ extensionis.

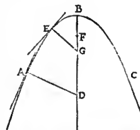
Item inter eosdem *MAXIMOS* circulos non dari *MINIMVM*; quoniam ad partes verticis B, supra circulum DL, residuo trilineo, licet terminato, alij infiniti circuli perpetuò decrescentes inscribi possunt.



THEOR. IL. PROP. IIC.

MAXIMORVM circulorum, ad puncta Parabolicę, aut Hyperbolicæ peripheriæ inscriptorum, MINIMVS est, qui ad axis verticem inscribitur. Aliorum verò is, cuius contactus magis distat à vertice, maior est, neque datur MAXIMVS.

ESto Parabole, vel Hyperbole ABC, cuius axis BD, vertex B, & in eius peripheria sumpta sint quælibet puncta A, E extra verticem B, à quo agantur contingentibus perpendiculares AD, EG, & ab axe abscissa sit BF, æqualis dimidio recti datæ sectionis. Patet si cum centris F, G, D, inuerualliis verò FB, GE, DA circuli describantur, ipsos datæ sectioni ABC esse inscriptos, atque *MAXIMOS* [a] ad puncta B, E, A inscriptibilium. Dico iam inter hos *MAXIMOS*, *MINIMVM* esse eum, qui ad verticem B inscribitur. Aliorum autem illum, qui ad punctum E propinquius vertici, minorem esse eo, qui ad A vertici remotius, inscribitur.



a 1. Coroll. 20. h. & 95. h.

Nam quælibet perpendicularis GE, DA, &c. maior [b] est dimidio recti, siue maior FB: quare circulus ex FB erit *MINIMVS*, &c. sed GE, quæ à contactu vertici propiori, minor [c] est DA, quę à remotiori: quare circulus ex GE, erit minor circulo ex GA, &c. neque inter hos, *MAXIMVS* reperitur, cum sectio Parabole, aut Hyperbole ad partes vertici oppositas sit infinitæ extensionis, ac proinde vnquam ei inscribi nequeat circulus tàm longi interualli, quin infra alij adhuc maioris interualli inscribi possint. Quod tandem erat demonstrandum.

b 1. Coroll. 90. h.

c 93. h.

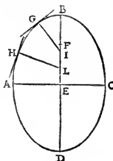
THEOR. L. PROP. IC.

MAXIMORVM circulorum, ad puncta Ellipticæ peripheriæ inscriptorum, MAXIMVS est qui ad verticem minoris axis inscribitur. MINIMVS verò, qui ad verticem maioris. Aliorum autem is, cuius contactus à vertice maioris axis magis remouetur, maior est.

ESto Ellipsis ABCD, cuius axis maior BD, minor AC, centrum E, sitq; DF æqualis dimidio recti, cuius transuersum latus est BD; & ex

punctis

punctis G, H, in Ellipsis peripheria vbicunque inter semi-axes assumptis, sint contingentibus perpẽdiculares GI, HL. Constat, si cum centris E, L, I, F, interuallis verò EA, LH, IG, FB, circuli describantur, ipsos Ellipsi ABCD inscriptos esse, ac *MAXIMOS* [a] ad puncta A, H, G, B inscriptibilium. Dico iam inter hos *MAXIMOS*, *MAXIMVM* esse qui ad A, *MINIMVM* verò, qui ad B inscribitur. Aliorum autem inscriptum ad punctum H, quod à vertice B maioris axis magis remouetur, maiorem esse inscripto ad punctum G, quod ipsi vertici propius est.



a 26.92.h. 1. Coroll. 20. h.

Etenim quęlibet perpendicularis LH, IG inter semi-axes, minor est semi-axe maiori EA, sed maior [b] semper semi-recto FB: vnde circulus ex EA erit *MAXIMVS*, & ex FB *MINIMVS* inscriptibilium: sed LH maior [c] est IG: quapropter circulus ex LA, erit maior circulo ex IG. Quod probandum erat.

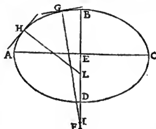
b 91. h.

c 94. h.

THEOR. LI. PROP. C.

MINIMORVM circulorum ad puncta Ellipticæ peripheriæ circumscriptorum, MINIMVS est, qui ad verticem maioris axis circumscribitur. MAXIMVS verò qui ad verticem minoris. Aliorum autem is, cuius contactus à vertice minoris axis magis distat, minor est.

ESto Ellipsis ABCD, cuius axis maior AC, minor BD, centrum E, & sumpta sit BF æqualis dimidio recti, cuius transuersum latus est BD, & ex punctis G, H, vbicunque in Ellipsis peripheria inter semi-axes assumptis, sint contingentibus perpendiculares GI, HL. Constat iam, si ex centris E, L, I, F, cum interuallis EA, LH, IG, FB describantur circuli, ipsos Ellipsi ABCD circumscriptos esse, & *MINIMOS* [d] ad puncta A, H, G, B, circumscriptibilium. Dico tamen inter hos *MINIMOS*, *MINIMVM* esse, qui ad A; *MAXIMVM*, qui ad B



d 26.92.h. 1. Coroll. 20. h.

circum-

circumscribitur. Aliorum verò, inscriptum ad H, minorem esse inscripto ad punctum G, quod minoris axis vertici propinquius est.

a 91. h. Quæuis enim perpendicularis LH, IG inter semi-axes, maior est semi-axe maiori EA, sed minor a semper semi-recto FB; vnde circulus ex EA erit *MINIMVS*, & ex FB *MAXIMVS* circumscriptibilium; sed est

b 94. h. LH b minor IG: quare circulus ex LH erit minor circulo ex IG. Quod erat propositum.

At rotundus hic Propositionum numerus, est quæso

PRIMI LIBRI FINIS.

ADDENDA LIBI I.

IN *huius operis contextu, vel etiam in ipsa perscriptione, quædam sunt, quæ aut mentem nostram, aut Amanuensis, quamuis accuratissimi, oculum effugerant: itaque sub calcem vniuscuiusque libri eadem sic addere liceat.*

Pag. 74. ad finem Prim. Coroll.

Quapropter huiusmodi Parabolæ iuxta has intereeptas lineas diametro B E parallelas, sunt semper inter se æquidistantes, licet iuxta intercepta applicatarum segmenta A E, I D, L M, & ad easdem partes A I, E D sint semper simul accedentes, nunquam verò coeuntes.

Ad calcem Pag. 78.

COROLL. II.

PAtet denique congruentes Hyperbolas per diuersos vertices simul adscriptas, & ad easdem partes productas, esse inter se, & simul semper magis accedentes, & semper æquidistantes. Nam iuxta intercepta applicatarum segmenta A E, S D, X Y, in præcedentibus figuris huiusmodi Hyperbolæ semper fiunt propiores, licet nunquam simul conueniant; iuxta autem rectas B E, M D, Z Y, ad easdem partes A S, E D, perpetuam seruant æquidistantiam, cum ipsæ B E, M D, Z Y inter se æquales sint ostensæ, &c.

Pag. 87. ad finem Moniti.

atque item congruentes Hyperbolæ, &c. prout in 2. Coroll. prop. quadragesiquartæ monuimus.

Pag. 123. post Prop. 77.

Aliter idem, ac Vniuersaliùs.

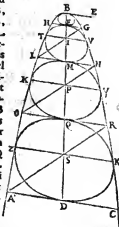
MAXIMÆ similes Ellipses, Parabolæ inscriptę, & à vertice successiuè se mutuò contingentes, sunt inter se in ratione quadratorum, disparium numerorum ab vnitate incipientium.

ESto Parabole A B C, cuius diameter B D, latus rectum B E, & circa quodlibet diametri segmentum B F sit ipsi Parabolæ per verticem E inscripta *MAXIMA* Ellipsis B F (quę erit * illa, cuius rectum latus idem sit, ac rectum B E) & applicata ex F ad diametrum recta H F G, sumptaque F I æquali ipsi F B, ducatur diagonalis G I L, ex L applicetur L M N, * 20. h.

atque

atque ex N agatur N P O ipsi G L parallela, ex O verò recta O Q R parallela ad L N, & R S A ad N O, atque A D C ipsi O R, & hoc fiat quoties libuerit: patet, si per puncta I, P, S, intersectionum ipsarum diagonalium cum diametro, agantur applicatæ T V, X Y, Z K, &c. & circa diametri segmenta F M, M Q, Q D, &c. & per extrema prædictarum applicatarum describantur Ellipses T F V M, X M Y Q, Z Q K D, has omnes esse Para-
a h. bolæ A B C inscriptas, a & similes inter se, ac se mutuò successiuè contingentes. Iam dico easdem Ellipses, primæ B F similes esse, atq; inter se eam rationem habere, ac numeri quadrati disparium numerorum ab vnitate: nimirum esse in progressione numerorum 1. 9. 25. 49. &c.

b 1. Coroll. 13. h. Quoniam igitur est b M B ad B I, vt B I ad B F, erit diuidẽdo M I ad I B, vt I F ad F B, sed est I F æqualis F B, ex constructione, quare M I ipsi I B æqualis erit, ac ideo in Ellipsi T F V M, erit quadratum T I ad re-
c 21. primi Conic. d Coroll. 1. huius. ctangulum M I F, hoc est rectum eius c latus ad transuersum, vt idem quadratum T I, vel rectangulum d sub I B, & recto B E, ad rectãgulum sub eadem I B, & sub I F, hoc est vt linea B E ad I F, (cum sit I B communis rectangulorum altitudo) vel ad ei æqualem B F, nempe vt rectum ad transuersum Ellipsis B F: quapropter Ellipsis B F ipsi T F V M est similis, sed vnaquęque aliarum inscriptarum Ellipsium circa diametri segmenta M Q, Q D, &c. eidem T F V M est similis, vt supra monuimus, quare omnes huiusmodi inscriptæ Ellipses erunt similes inter se. Et cum sit M I ęqualis I B, & I B dupla F B, erit tota M B quadrupla B F. Si ergo B F concipiatur vt vnum, erit B I vt 2, & M B vt 4, atque M I vt 2, & M F vt 3.



Cumq; in triangulis P M N, I F G sint anguli ad M, F inter se æquales, ob æquidistantes applicatas M N, F G; atque anguli ad P, I item ęquales, ob parallelas diagonales N P, G I, erunt reliqui ad N, G pariter æquales, siue ipsa triangula inter se similia, vnde latus N M ad M P erit, vt latus G F ad F I, & permutando N M ad G F, vt M P ad F I, vel quadratum N M ad
e 20. primi Conic. G F, siue e recta M B ad B F; hoc est 4. ad 1, vt quadratum M P ad quadratum F I; vnde quadratum M P quadruplum erit quadrati F I, siue linea M P dupla F I, siue dupla ad B F, sed B F ponitur vt vnum, ergo M P erit
f 1. Coroll. 13. h. 2; estque B M 4, ergo B P erit 6, estque B M ad B P, vt est f B P ad B Q, quare B Q erit vt 9, sed B M est vt 4, ergo M Q erit 5. Præterea, eadem ratione, ac supra, ostendetur triangulum R Q S simile triangulo G F I,
g 20. primi Conic. & quadratum R Q ad G F esse vt quadratum Q S ad F I, sed est g quadratum R Q nonuplum quadrati G F, cum sit recta Q B nonupla B F, vt modò ostendimus, ergo, & quadratum Q S erit nonuplum quadrati F I, siue quadrati B F, hoc est linea Q S tripla B F, quare tota B S erit vt 12; estq;

B Q

BQ ad BS, a vt BS ad BD, quare cum BQ sit 9, & BS 12, erit BD 16, & QD 7, & sic vlteriùs demonstrabuntur diametri huiusmodi similium Ellipsium Parabolæ inscriptarum, &c. à vertice sumptæ, augeri iuxta progressionem disparium numerorum ab vnitate, nempe vt numeri 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. Sed Ellipses similes sunt inter se, vt quadrata homologarum diametrorum; quare eædem *MAXIMAE* Ellipses Parabolæ ABC inscriptæ, & à vertice successiuè se mutuò contingentes, sunt in ratione quadratorum disparium numerorum ab vnitate. Quod probandum erat. a 1. Coroll. 13. h.

COROLL.

Hinc iterum apparet veritas Prop. 77. huius. Nam si BD diameter datæ Parabolæ ABC, fuerit axis; & prima Ellipsis circa segmentum BF fuerit circulus, reliquæ Ellipses infra hanc successiuè inscriptæ, erunt pariter Circuli, & demonstratio, ac conclusio omnino erit eadem, ac in superiori.

Pag. 131. post Prop. 84.

In hac, & in proxima præcedenti 82. propositione ex ipsamet constructione, ac demonstratione elicitur, nos vtrobique assumpsisse datam applicatam AC ad diametrum datæ Ellipsis, nunquam per centrum transire: in hoc enim casu vtriusque Problematis solutio facillimè patebit, tunc nimirū, si hinc inde à centro super diametrum sumatur dimidium dati transuersi lateris, atque circa ipsorum dimidiorum aggregatum, tanquam circa transuersum diametrum, & per extrema ipsius applicatæ describatur Ellipsis, quę vel erit b *MAXIMA* inscripta, vel *MINIMA* datæ Ellipsi circumscripta; cum eadem applicata AC sit tanquam communis secunda diameter, vel prout commune transuersum latus vtriusque Ellipsis, &c. b 2. Coroll. 19. h.

Pag. 144. ad calcem Prop. 93.

Lineæ, quæ ibi in figuris iungentes puncta C, D, manifestò indicant in ipsa transcriptione omissum fuisse sequens.

SCHOLIVM.

Ex his aliàs manifestum fiet haud inutiliter animaduertisse in Parabola, vel in Hyperbola, aut in quadrante Ellipsis circa maiorem axim, prædictarum contingentibus perpendicularium ad easdem axis partes ductarū, quæ à contactu vertici remotiori ducitur occurrere axi infra occursum superioris perpendicularis, ac simul vltra axim conuenire ad partes contactibus oppositas: sed in quadrante Ellipsis circa minorem axim se mutuò secare inter tangentium contactus, & minorem axim in angulo quadrantis, qui deinceps est ei, ad cuius peripheriam ductæ sunt perpendiculares; ac ideo occursum inferioris perpendicularis cum axe minori cadere supra occursum superioris, quæ ducitur ex contactu vertici propiori.

In fingulis enim figuris iuncta recta C D: erit in tribus primis circa maiorem axim, recta C D maior C A (cum circulus ex C A fit sectioni a inscriptus, ac propterea secet C D) sed C A maior est G D, vt hic ad numeros 2, 3, & 5. ostensum est, ergo C D eò ampliùs maior erit ipsa G D, siue quadratum C D maius quadrato G D, vel duo simul C I, I D maiora duobus simul G I, I D, quare dempto communi D I, erit quadratum C I maius quadrato G I, vnde punctum C cadet infra G: sed A C, D G simul conueniunt ad partes axis B R, vt ad num. 1. ostendimus, ergo ipsarum occursus erit vltra axim B R.

a 92. h.

In quarta demum figura, est C D minor C A (cum circulus ex C A fit Ellipsi circumscriptus b) & C A minor G D, prout ad num. 6. huius demonstrauimus, quare C D erit omnino minor G D, siue quadratum C D minus quadrato G D, vel duo simul C I, I D minora duobus simul G I, I D; quamobrè dempto I D, erit C I minus G I, siue punctum C occursus inferioris perpendicularis A C cadet supra G occursum superioris D G; sed tales perpendiculares A C, D G se mutuò secant (vt superiùs ostendimus ad num. 1.) ad partes axis B R, quare ipsarum occursus erit inter contactus, & minorem axim, sed respectu maiorem axim M L se mutuò secant vltra M L, vti paulò ante demonstrauimus. Quare in Ellipsi occursus huiusmodi perpendicularium A C, D G cadet in angulo quadrantis M L G, qui deinceps est quadranti M L B, ad cuius peripheriam M A B ductæ sunt perpendiculares A C, D G, &c.

b ibidem.

Pag. 147. ad finem Prop. 97.

quodque de *MAXIMIS* similibus Ellipsibus angulo rectilineo inscriptis facillimùm est demonstrare.

FINIS.